グラムシュミットの直交化

V を $\mathbb{C}^n$ の部分空間として

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_\ell$$

を V の正規直交基底とします。このとき $\in \mathbb{C}^n$ に対して

$$P\vec{q} = \langle \vec{q}, \vec{p}_1 \rangle \vec{p}_1 + \cdots + \langle \vec{q}, \vec{p}_\ell \rangle \vec{p}_\ell$$

と定めると

$$P\vec{q} \in V$$

が成立します。さらに

(#) $$\vec{q} - P\vec{q} \perp V$$

が成立します。実際

$$\langle \vec{q} - P\vec{q}, \vec{p}_j \rangle = \left\langle \vec{q} - \sum_{i=1}^{\ell} \langle \vec{q}, \vec{p}_i \rangle \vec{p}_i, \vec{p}_j \right\rangle$$

$$= \langle \vec{q}, \vec{p}_j \rangle - \sum_{i=1}^{\ell} \langle \vec{q}, \vec{p}_i \rangle \langle \vec{p}_i, \vec{p}_j \rangle$$

$$= \langle \vec{q}, \vec{p}_j \rangle - \langle \vec{q}, \vec{p}_j \rangle = 0$$

より (#) は従います。というのは $\forall \vec{v} \in V$ は

$$\vec{v} = c_1 \vec{p}_1 + \cdots + c_\ell \vec{p}_\ell$$

と書けるので

$$\langle \vec{q} - P\vec{q}, \vec{v} \rangle = \sum_{j=1}^{\ell} \overline{c_j} \langle \vec{q} - P\vec{q}, \vec{p}_j \rangle$$

$$= \sum_{j=1}^{\ell} \overline{c_j} \cdot 0 = 0$$

から分かります。この $P\vec{q}$ を $\vec{q}$ の V への直交射影と呼びます。

次に V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間として

$$\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_l$$

が基底であるとします.

$$V_j = \{ c_1\vec{q}_1 + \cdots + c_j\vec{q}_j \; ; \; c_1, \dots, c_j \in \mathbb{R} \}$$

とします. このとき $\dim V_j = j$ です. V_j の正規直交基底

$$\vec{p}_1, \dots, \vec{p}_j$$

が構成できたとします. このとき $\vec{q}_{j+1}$ に対して

$$\vec{w}_{j+1} = \langle \vec{q}_{j+1}, \vec{p}_1 \rangle \vec{p}_1 + \cdots + \langle \vec{q}_{j+1}, \vec{p}_j \rangle \vec{p}_j$$

と $\vec{q}_{j+1}$ の V_j への直交射影をとります. このとき

$$(\#) \quad \langle \vec{q} - \vec{w}_{j+1}, \vec{p}_i \rangle = 0 \quad (i = 1, \dots, j)$$

が成立します. ここで

$$\vec{q}_{j+1} - \vec{w}_{j+1} = \vec{0}$$

とすると

$$\vec{q}_{j+1} = \vec{w}_{j+1} \in V_j$$

より $\vec{q}_1, \dots, \vec{q}_j, \vec{q}_{j+1}$ が1次独立であることに反します.

よって

$$\vec{q}_{j+1} - \vec{w}_{j+1} \neq \vec{0}.$$

となります.

$\alpha_{j+1} = \| \vec{q}_{j+1} - \vec{w}_{j+1} \| \neq 0$

より

$$\vec{p}_{j+1} = \frac{1}{\| \vec{q}_{j+1} - \vec{w}_{j+1} \|} (\vec{q}_{j+1} - \vec{w}_{j+1})$$

と定めることができます. このとき (#) より

$$(\vec{p}_{j+1}, \vec{p}_i) \quad (i = 1, \cdots, j)$$

が従います. また $\| \vec{p}_{j+1} \| = 1$ も成立します. このことから

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_j, \vec{p}_{j+1} \text{ は } V_{j+1} \text{ の正規直交基底}$$

であることが分かります.

$\vec{v}_{j+1} \in V_{j+1}$ とすると

$$\vec{v}_{j+1} = c_1 \vec{q}_1 + \cdots + c_j \vec{q}_j + c_{j+1} \vec{q}_{j+1}$$

において

$$c_1 \vec{q}_1 + \cdots + c_j \vec{q}_j \in V_j$$

ですから

$$c_1 \vec{q}_1 + \cdots + c_j \vec{q}_j = c_1' \vec{p}_1 + \cdots + c_j' \vec{p}_j$$

とできます. さらに

$$\begin{aligned} \vec{q}_{j+1} &= \alpha_{j+1} \vec{p}_{j+1} + \vec{w}_{j+1} \\ &= c_1'' \vec{p}_1 + \cdots + c_j'' \vec{p}_j + \alpha_{j+1} \vec{p}_{j+1} \end{aligned}$$

と表せます. 従って

$$\vec{v}_{j+1} = (c_1' + c_1'' c_{j+1})\vec{p}_1 + \cdots$$

$$\cdots + (c_j' + c_j'' c_{j+1})\vec{p}_j + c_{j+1}\alpha_{j+1}\vec{p}_{j+1}$$

と V_{j+1} は $\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_j, \vec{p}_{j+1}$ で生成されるからです．

<u>定理</u>　$V \subset W (\subset \mathbb{R}^n)$ は部分空間とします．

$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l$ が V の正規直交基底であるとき．

$$\vec{p}_1, \cdots, \vec{p}_l, \vec{p}_{l+1}, \cdots, \vec{p}_{l+k}$$

の形で W の正規直交基底が構成できます

上のグラム・シュミットの直交化において

$\vec{v}_{j+1} \in V_{j+1}$ を特に $\vec{g}_{j+1}$ とすれば

$$\vec{g}_{j+1} = * \vec{p}_1 + \cdots + * \vec{p}_{j+1}$$

と書けることが従います．一般的に A を $m \times n$ 行列 $(m \geqq n)$ として $\mathrm{rank}\, A = n$ とします．このとき

$$A = QR$$

として Q は列が正規直交系，R は上三角行列という形に分解できます．