複素数ベクトルの内積

$\vec{z}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n$ に対して エルミート内積

$$\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \sum_{i=1}^{n} z_i \overline{w_i}$$

と定める. さらに $\vec{z} \in \mathbb{C}^n$ のノルム(大きさ)を

$$\| \vec{z} \|^2 = \langle \vec{z}, \vec{z} \rangle = \sum_{i=1}^{n} |z_i|^2$$

によって定義する. エルミート内積は以下の性質を満たす.

(1) $\langle \vec{z}_1 + \vec{z}_2, \vec{w} \rangle = \langle \vec{z}_1, \vec{w} \rangle + \langle \vec{z}_2, \vec{w} \rangle$

(2) $\langle \lambda \vec{z}, \vec{w} \rangle = \lambda \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$

(3) $\langle \vec{z}, \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \rangle = \langle \vec{z}, \vec{w}_1 \rangle + \langle \vec{z}, \vec{w}_2 \rangle$

(4) $\langle \vec{z}, \lambda \vec{w} \rangle = \overline{\lambda} \langle \vec{z}, \vec{w} \rangle$

(5) $\langle \vec{z}, \vec{w} \rangle = \overline{\langle \vec{w}, \vec{z} \rangle}$

また ノルムは以下の性質を満たす.

(6) $\| \vec{z} \| \geqq 0$, $\| \vec{z} \| = 0 \Leftrightarrow \vec{z} = \vec{0}$

(7) $\| \lambda \vec{z} \| = |\lambda| \cdot \| \vec{z} \|$

(8) $\| \vec{z} + \vec{w} \| \leqq \| \vec{z} \| + \| \vec{w} \|$.

$A \in M_{m,n}(\mathbb{C})$ とする．すなわち複素数値の m 行 n 列の行列とします．このとき

$$A^* = {}^t(\overline{A}) \in M_{n,m}(\mathbb{C})$$

と定めます．これは A の adjoint と呼び

$$(A^*)^* = A$$

$$(AB)^* = B^* A^*$$

$$(A \in M_{m,n}(\mathbb{C}),\ B \in M_{n,\ell}(\mathbb{C}))$$

を満たします．応用上大事なのは $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$, $\vec{w} \in \mathbb{C}^m$ に対して

$$\langle A\vec{v}, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, A^*\vec{w} \rangle$$

を満たすことです．

<u>定義</u>　$A \in M_n(\mathbb{C})$ が

$$A^* = A$$

を満たすときエルミート (Hermite) であるといいます．

<u>注意</u>　$A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称ならばエルミートです．

定理 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がエルミートとします。

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \implies \alpha \in \mathbb{R}$$

が成立します。

ある $\vec{v} \in \mathbb{C}^n$ で $\vec{v} \neq \vec{0}$、$A\vec{v} = \alpha\vec{v}$ を満たすものが存在します。このとき

$$\langle A\vec{v}, \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, A^*\vec{v} \rangle = \langle \vec{v}, A\vec{v} \rangle$$

において

$$\text{最左辺} = \langle \alpha\vec{v}, \vec{v} \rangle = \alpha \|\vec{v}\|^2$$

$$\text{最右辺} = \langle \vec{v}, \alpha\vec{v} \rangle = \overline{\alpha} \|\vec{v}\|^2$$

となり $\vec{v} \neq \vec{0}$ から $\alpha = \overline{\alpha}$ が従います。よって

$$\alpha \in \mathbb{R}$$

であることが分かります。

系 $A \in M_n(\mathbb{R})$ が対称ならば

$$\Phi_A(\alpha) = 0 \implies \alpha \in \mathbb{R}$$

が成立します。

定理 $A \in M_n(\mathbb{R})$ は対称とします。このとき直交行列 P が存在して

$$^tPAP$$

が対角行列となります。

n に関する帰納法で証明します。$\Phi_A(\alpha_1) = 0$ とします。このとき $\exists \vec{r_1} \in \mathbb{R}^n$ で

$$A\vec{r_1} = \alpha_1 \vec{r_1}, \quad \|\vec{r_1}\| = 1$$

を満たすものが存在します。この $\vec{r_1}$ を用いて $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底 $\vec{r_1}, \vec{r_2}, \cdots, \vec{r_n}$ をとります。このとき

$$R = (\vec{r_1} \cdots \vec{r_n})$$

は直交行列となり

$$\begin{aligned} AR &= (A\vec{r_1} \ A\vec{r_2} \cdots A\vec{r_n}) \\ &= (\vec{r_1} \ \vec{r_2} \cdots \vec{r_n}) \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathfrak{a} \\ \hline 0 & \\ \vdots & B \\ 0 & \end{array}\right) \\ &= R \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathfrak{a} \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right) \end{aligned}$$

となります。

$$^tRAR = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \mathfrak{a} \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right)$$

の両辺を転置します。

$$^t(^tRAR) = {}^tR\,{}^tA R = {}^tRAR$$

より

$$ {}^tRAR = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \cdots 0 \\ \hline {}^t* & {}^tB \end{array}\right) $$

$$ \parallel $$

$$ \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & * \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right) $$

から　${}^tB = B$, $* = \Phi$ が分かります．よって

$$ {}^tRAR = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right) $$

において B が実対称であることが分かります．

帰納法の仮定によりある $(n-1)$ 次の直交行列 Q_1 が存在して

$$ {}^tQ_1BQ_1 = \begin{pmatrix} \beta_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} $$

と対角化できます．

$$ Q = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & Q_1 \end{array}\right) $$

は直交で

$$ \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} 1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & Q_1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & BQ_1 \end{array}\right) $$

$$ = \left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & Q_1\begin{pmatrix} \beta_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} 1 & \Phi \\ \hline \vec{0} & Q_1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & \\ \hline & \begin{matrix} \beta_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{matrix} \end{array}\right) $$

より

$$\left(\begin{array}{c|c} \alpha_1 & 0 \\ \hline \vec{0} & B \end{array}\right) Q = Q \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

となります。よって

$$\begin{array}{l} {}^tQ({}^tRAR)Q = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix} \\ \quad \parallel \\ {}^t(RQ)A(RQ) \end{array}$$

が従います。$P = RQ$ とすると P は直交で

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \beta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \beta_n \end{pmatrix}$$

と A は P で対角化されます。

定義 以下の必要十分条件を満たす $U \in M_n(\mathbb{C})$ を unitary 行列と呼びます。

(1) $\langle U\vec{v}, U\vec{w} \rangle = \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle \quad (\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{C}^n)$

(2) $U^*U = UU^* = I_n$

(3) $U = (\vec{u}_1 \cdots \vec{u}_n)$ と列ベクトル表示をすると

$$(\vec{u}_i, \vec{u}_j) = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

定理 $A \in M_n(\mathbb{C})$ がエルミートであるとする.

ある unitary 行列 U により

$$U^* A U = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$$

と対角化されます.

これは実対称行列の対角化と同様に証明されます.

定義 V を $\mathbb{R}^n$ の部分空間とします. $\vec{p} \in \mathbb{R}^n$ の V への直交射影とは

$$\vec{q} \in V, \quad \vec{p} - \vec{q} \perp V$$

を満たす $\vec{q}$ です

定理 上の $\vec{q}$ は一意的に存在します.

$\vec{q}_1, \vec{q}_2$ が上の条件を満たすとします.

$$\begin{aligned}\|\vec{q}_1 - \vec{q}_2\|^2 &= (\vec{q}_1 - \vec{q}_2, \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\ &= ((\vec{p} - \vec{q}_2) - (\vec{p} - \vec{q}_1), \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\ &= (\vec{p} - \vec{q}_2, \vec{q}_1 - \vec{q}_2) - (\vec{p} - \vec{q}_1, \vec{q}_1 - \vec{q}_2) \\ &= 0\end{aligned}$$

が従います. $\vec{q}_1 - \vec{q}_2 \in V$ に注意しましょう.

これより $\vec{q}_1 = \vec{q}_2$ が分かります.

存在することは V の正規直交基底 $\vec{p}_1, \ldots, \vec{p}_l$ を構成し

$$\vec{q} = \sum_{i=1}^{l} (\vec{q}, \vec{p}_i) \vec{p}_i$$

と定めます.

(注 上で $\mathbb{R}^n = \mathbb{C}^n$ のとき $(\vec{q}, \vec{p}_i)$ を $\langle \vec{q}, \vec{p}_i \rangle$ にします.)