2015年11月24日

slin 20151124

対角化可能の必要十分条件

$A \in M_n(\mathbb{K})$ の固有多項式が

$$\Phi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda - \beta_j)^{m_j}$$

$$\beta_i \neq \beta_j \ (i \neq j), \quad m_j \geqq 1, \quad \beta_j \in \mathbb{K}$$

と因数分解されているとする。このとき次の定理が成立する。

定理 以下は必要十分条件である。((1) $\Leftrightarrow$ (2) は既出)

(1) A は対角化可能である。

(2) $\mathbb{K}^n = V(\beta_1) \oplus \cdots \oplus V(\beta_\ell)$

(3) $(A - \beta_1 I_n) \cdots (A - \beta_\ell I_n) = O_n$.

簡単のため $\ell = 3$ の場合を考える。

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^{m_1} (\lambda - \beta)^{m_2} (\lambda - \gamma)^{m_3}$$

とする。

(2) $\Rightarrow$ (3)

$$\mathbb{K}^n = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

とする。任意の $\vec{x} \in \mathbb{K}^n$ に対して

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 + \vec{x}_3$$

$$\vec{x}_1 \in V(\alpha), \ \vec{x}_2 \in V(\beta), \ \vec{x}_3 \in V(\gamma)$$

と分解できる。例えば

$$\begin{aligned}
&(A - \alpha I)(A - \beta I)(A - \gamma I)\vec{x}_1 \\
&= (A - \beta I)(A - \gamma I)(A - \alpha I)\vec{x}_1 \\
&= (A - \beta I)(A - \gamma I)\vec{0} = \vec{0}
\end{aligned}$$

より

$$(A-\alpha I)(A-\beta I)(A-\gamma I)\vec{x}_j = 0 \quad (j=1,2,3)$$

が従う。よって

$$(A-\alpha I)(A-\beta I)(A-\gamma I)\vec{x} = \vec{0}$$

が任意の $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して成立することが分かる。よって

$$(A-\alpha I)(A-\beta I)(A-\gamma I) = O_3.$$

(3) $\Rightarrow$ (2)

$$g_1(\lambda) = \frac{(\lambda-\beta)(\lambda-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}, \quad g_2(\lambda) = \frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\gamma)}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)}$$

$$g_3(\lambda) = \frac{(\lambda-\alpha)(\lambda-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

と定めると

$$1 = g_1(\lambda) + g_2(\lambda) + g_3(\lambda)$$

が成立する。よって

$$P_j = g_j(A) \quad (j=1,2,3)$$

と定めると

$$I_n = P_1 + P_2 + P_3$$

が従う。(3)の条件より

$$\mathrm{Im}(P_1) \subset V(\alpha)$$
$$\mathrm{Im}(P_2) \subset V(\beta)$$
$$\mathrm{Im}(P_2) \subset V(\gamma)$$

となる。実際、$\vec{v} \in \mathrm{Im}(P_1)$ とすると

$$\vec{v} = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} (A-\beta I)(A-\gamma I)\vec{w}$$

と表わされるので

$$(A-\alpha I)\vec{v} = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} (A-\alpha I)(A-\beta I)(A-\gamma I)\vec{w}$$

$$= \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} O_n \vec{w} = \vec{0}$$

となるからである。

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}(P_1) + \mathrm{Im}(P_2) + \mathrm{Im}(P_3)$$

$$\subset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma) \subset \mathbb{K}^n$$

より $n \leqq \dim\left(V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)\right) \leqq n.$

となるので

$$\mathbb{K}^n = V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma)$$

が従う。

注[1] $i \neq j$ において $P_i P_j = O_n$ が従う。

$$P_1 P_2 = \frac{1}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} (A-\beta I)(A-\gamma I)$$

$$\cdot \frac{1}{(\beta-\alpha)(\beta-\gamma)} (A-\alpha I)(A-\gamma I)$$

$$= O_n \quad (\text{条件}(3))$$

(2) $i=j$ のとき $P_i^2 = P_i$

$$P_1 = P_1(P_1+P_2+P_3) = P_1^2 + P_1P_2 + P_1P_3 = P_1^2$$

(3) (1) と (2) より

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2) \oplus \mathrm{Im}(P_3)$$

と直和になることが従う.

(4)

$$\mathbb{K}^n = \mathrm{Im}(P_1) \oplus \mathrm{Im}(P_2) \oplus \mathrm{Im}(P_3)$$
$$\subset V(\alpha) \oplus V(\beta) \oplus V(\gamma) \subset \mathbb{K}^n$$

において

$$n = \dim \mathrm{Im}(P_1) + \dim \mathrm{Im}(P_2) + \dim \mathrm{Im}(P_3)$$
$$\leq \dim V(\alpha) + \dim V(\beta) + \dim V(\gamma) \leq n.$$

が従うがこれから

$$\dim \mathrm{Im}(P_1) = \dim V(\alpha)$$
$$\dim \mathrm{Im}(P_2) = \dim V(\beta)$$
$$\dim \mathrm{Im}(P_3) = \dim V(\gamma)$$

が分かる. これから

$$V(\alpha) = \mathrm{Im}\, P_1,\quad V(\beta) = \mathrm{Im}\, P_2,\quad V(\gamma) = \mathrm{Im}\, P_3$$

となる.