

2015年11月13日

slim 2015

定理 $m \geq n$ として $A \in m \times n$ (行列) とある。 \Leftrightarrow である。

$$\text{ker}(A) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{1m} \end{pmatrix} \text{ を } n \text{ 行 } n \text{ 列 表示}$$

とあると ある $i_1 < \dots < i_n \in \{1, \dots, m\}$ として

$$\begin{vmatrix} a_{i_1} \\ \vdots \\ a_{i_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

$$(\Leftarrow) A\vec{x} = \vec{0} \text{ とあると } \begin{pmatrix} a_{i_1} \\ \vdots \\ a_{i_n} \end{pmatrix} \vec{x} = \vec{0} \text{ となる。}$$

これは $\vec{x} = \vec{0}$ しかない。 a は 0 ではない。

(\Rightarrow) 次元定理より

$$\dim \text{Im}(A) = n$$

より

$$\text{rank}({}^t A) = \text{rank}(A) = \dim \text{Im}(A) = n$$

||

$$\dim \text{Im}({}^t A)$$

からわかる。 \exists $I_n({}^t A)$ の基底として

$${}^t a_{i_1}, \dots, {}^t a_{i_n}$$

からわかる ($i_1 < \dots < i_n \in \{1, \dots, m\}$) である。

$$\begin{vmatrix} {}^t a_{i_1} & \dots & {}^t a_{i_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{i_1} \\ \vdots \\ a_{i_n} \end{vmatrix} \neq 0$$