2015年10月23日

定理　A が $m \times n$ 行列とするとき

$$\dim(\mathrm{Im}({}^tA)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

証明　$\dim \mathrm{Im}(A) = r$ とすると次元定理により

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = n - r.$$

となる。$\dim(\mathrm{Im}({}^tA)) = s$ とすると、基底

$$\vec{\alpha}_1, \cdots, \vec{\alpha}_s$$

が存在する。

$$\vec{\alpha}_j = {}^t\mathbb{b}_j \quad (j = 1, \cdots, s)$$

とすると

$$A\vec{x} = \vec{0} \iff \mathbb{b}_j \vec{x} = 0 \quad (j = 1, \cdots, s)$$

に注意しよう。

$$B = \begin{pmatrix} \mathbb{b}_1 \\ \vdots \\ \mathbb{b}_s \end{pmatrix}$$

とすると $\mathrm{Im}(B) \subset \mathbb{R}^s$ より

$$\dim \mathrm{Im}(B) \leq s$$

となる。

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = \dim \mathrm{Ker}(B)$$
$$\overset{\shortparallel}{n - r}$$

より $\dim \mathrm{Im}(B) = r \leq s$

となる。$A = {}^t({}^tA)$ より同様に $s \leq r$ も従う。

別の見方　A を $m\times n$ 行列とするとき.

(1) $P \in M_m(\mathbb{K})$ が正則ならば

$$\ker(PA) = \ker(A)$$
$$\dim(\mathrm{Im}(PA)) = \dim(\mathrm{Im}(A))$$

(参考: 2015/09/18 の IV)

(2) $Q \in M_n(\mathbb{K})$ が正則ならば

$$\dim \ker(AQ) = \dim \ker(A)$$
$$\mathrm{Im}(AQ) = \mathrm{Im}(A)$$

(参考 2015/09/18 の IV)

(3) A は行基本変形と列基本変形で標準形になる

$$A \to \cdots \to \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

このとき m 次の正則行列 P, n 次の正則行列 Q が存在し

$$(\#) \qquad PAQ = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

(1), (2) を用いると

$$\dim \mathrm{Im}\, A = r, \quad \dim \ker(A) = n - r$$

(4) (#) より

$${}^tQ\, {}^tA\, {}^tP = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$$

となる ${}^tQ$, ${}^tP$ は正則なので

$$\dim \mathrm{Im}\, {}^tA = r, \quad \dim \ker(A) = m - r.$$