I

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

2行の余因子展開

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -3 \\ 0 & \lambda-4 & 0 \\ 0 & -5 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-4)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -3 \\ 0 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-4)(\lambda-1)(\lambda-6)$$

となる. よって A の固有値は $\lambda = 1, 4, 6$ である.

次に固有ベクトルを求めよう.

<u>$\lambda = 1$ のとき</u> (1) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

を解くことになる

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \times = \left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r \Leftrightarrow 2r} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{2r += 1r \times 2 \\ 3r += 2r \times 5}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \times = \left(-\frac{1}{3}\right)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{3r += 2r \times 5} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow y = z = 0$

が分かる. よって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

<u>$\lambda = 4$ のとき</u> $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

を解く.

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow[3r \times (-\frac{1}{5})]{1r \times \frac{1}{3}} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \leftrightarrow 3r} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{1r + = 2r \times \frac{2}{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{11}{15} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - \frac{11}{15} z = 0 \\ y + \frac{2}{5} z = 0 \end{cases}$$

である よって 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{15} z \\ -\frac{2}{5} z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{15} z \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

である.

<u>$\lambda = 6$ のとき.</u>

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \times \frac{1}{2}} \begin{pmatrix} 5 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[3r + = 2r \times 5]{1r + = 2r \times 2} \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 5x - 3z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

である. よって 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{5} z \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

である.

ここで $\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 15 \end{pmatrix}$, $\vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とおくと

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) \\ &= (\vec{p}_1 \ 4\vec{p}_2 \ 6\vec{p}_2) \\ &= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3) \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる. 一般論から Pは正則となるので

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{pmatrix}$$

と対角化できる.

一般論　$A \in M_3(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ が

$$\alpha \neq \beta, \ \beta \neq \gamma, \ \gamma \neq \alpha$$

を満たすとする. $\vec{p}_j \in \mathbb{R}^3 \ (j = 1, 2, 3)$ が

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1, \ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2, \ A\vec{p}_3 = \gamma\vec{p}_3$$

を満たすならば

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

は正則となる.

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1行+=3行×(−1)

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & 2 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1-\lambda \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

λ=1のときはここに0で入る.

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-2 & 0 \\ 0 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix}$$

λ=2のときはここに0で入.

$$= (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda-2)$$

1列で展開

ここに0で入っている

から $\lambda = -1, 1, 2$ が A の固有値である.

A の固有ベクトルを求めよう.

<u>$\lambda=-1$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と行基本変形できるので

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x - z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

から固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

<u>$\lambda=1$ のとき.</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と行基本変形できるので

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{cases} x \quad -3z = 0 \\ \quad y - 2z = 0 \end{cases}$$

となる. よって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

である.

<u>$\lambda = 2$ のとき.</u> $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

を解く.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ と行基本変形できる

ので固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

ここで

$$\vec{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P = (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)$$

とすると

$$AP = (A\vec{p}_1 \ A\vec{p}_2 \ A\vec{p}_3) = (-\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ 2\vec{p}_3)$$

$$= (\vec{p}_1 \ \vec{p}_2 \ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

となる. 一般論によって P は正則となるので A は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$$

と対角化できる.

(3) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

2行+=3行

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ -1 & \lambda-2 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & \lambda-3 & \lambda-3 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-3)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-1)(\lambda-3)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-3)^2$$

から A の固有値は $\lambda = 1, 3$ (重根) である.

A の固有ベクトルを求めよう.

<u>$\lambda = 1$ のとき.</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x - 2z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

よって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2z \\ -z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

である.

<u>$\lambda = 3$ のとき</u>

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\Longleftrightarrow x - y - z = 0$$

よって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y+z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y \neq 0 \\ \text{または} \\ z \neq 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ が $\begin{vmatrix}1&1\\1&0\end{vmatrix} = -1 \neq 0$ から分かるので、

$$y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \vec{0} \implies y = z = 0$$

従って

$$(y \neq 0 \text{ or } z \neq 0) \iff \begin{pmatrix}y+z\\y\\z\end{pmatrix} \neq \vec{0}$$

が分かる。

$$\vec{p_1} = \begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix},\ \vec{p_2} = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\ \vec{p_3} = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

とすると 次のように

$\vec{p_1}, \vec{p_2}, \vec{p_3}$ は1次独立である

ことが示され $P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ は正則である。そのためには 次の一般論を用いる。

> $A \in M_3(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすとする。
>
> $A\vec{v_1} = \alpha\vec{v_1}$, $A\vec{v_2} = \beta\vec{v_2}$, $\vec{v_1} + \vec{v_2} = \vec{0}$
>
> ならば
>
> $\vec{v_1} = \vec{v_2} = \vec{0}$.

$$c_1\vec{p_1} + (c_2\vec{p_2} + c_3\vec{p_3}) = \vec{0}$$

とすると

$$c_1\vec{p_1} = \vec{0},\quad c_2\vec{p_2} + c_3\vec{p_3} = \vec{0}$$

が従う。$\vec{p_1} \neq \vec{0}$ から $c_1 = 0$, $\vec{p_2} \nparallel \vec{p_3}$ から $c_2 = c_3 = 0$

よって

$$\left(c_1\vec{p_1}+c_2\vec{p_2}+c_3\vec{p_3}=\vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=c_3=0 \right)$$

が示された。これは $P=(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$ が正則であることと必要十分である。

$$\begin{aligned} AP &= (A\vec{p_1}\ A\vec{p_2}\ A\vec{p_3}) \\ &= (\vec{p_1}\ 3\vec{p_2}\ 3\vec{p_3}) = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix} \end{aligned}$$

から A は $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1&&\\&3&\\&&3\end{pmatrix}$

と対角化できる。

(4) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 & -2 \\ -2 & \lambda-2 & 0 \\ -2 & 0 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$ (サラスの公式で3項しか出ないので…)

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4) - 4(\lambda-4) - 4(\lambda-2)$$

$$= (\lambda-3)(\lambda-2)(\lambda-4) - 8(\lambda-3)$$

$$= (\lambda-3)\{(\lambda-2)(\lambda-4) - 8\}$$

$$= (\lambda-3)(\lambda^2 - 6\lambda)$$

$$= \lambda(\lambda-3)(\lambda-6)$$

から A の固有値は $\lambda = 0, 3, 6$ である.

固有ベクトルを求めよう.

<u>$\lambda=0$ のとき.</u> $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$ を解く. 行基本変形

$$A \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

から

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x + 2z = 0 \\ y - 2z = 0 \end{cases}$$

となるので, 固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$

となる.

<u>$\lambda=3$ のとき.</u> $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

において行基本変形

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

がいあるので

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+\frac{1}{2}z=0\\y+z=0\end{cases}$$

が分かる。従って固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}z\\-z\\z\end{pmatrix}=\frac{z}{2}\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix}\quad(z\neq 0)$$

である。

<u>$\lambda=6$ のとき.</u> $A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\vec{0}$

において行基本変形

$$\begin{pmatrix}3&-2&-2\\-2&4&0\\-2&0&2\end{pmatrix}\to\cdots\to\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&-\frac{1}{2}\\0&0&0\end{pmatrix}$$

を用いると

$$A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=6\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x-z=0\\y-\frac{1}{2}z=0\end{cases}$$

であることが分かる。よって固有ベクトルは

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}z\\\frac{1}{2}z\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{2}z\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}\quad(z\neq 0)$$

である。

$$\vec{p_1}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix},\ \vec{p_2}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\2\end{pmatrix},\ \vec{p_3}=\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$$

$$P=(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})$$

と定めると一般論から P は正則で

$$AP=(A\vec{p_1}\ A\vec{p_2}\ A\vec{p_3})=(\vec{0}\ 3\vec{p_2}\ 6\vec{p_3})$$
$$=(\vec{p_1}\ \vec{p_2}\ \vec{p_3})\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}=P\begin{pmatrix}0&&\\&3&\\&&6\end{pmatrix}$$

から A は対角化できる。

補足　${}^tA = A$ すなわち A が対称であることに注意しよう。このとき一般論(*)から

$$\vec{p}_i \perp \vec{p}_j \quad (i \neq j)$$

が従う。よって

$$\vec{q}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},\ \vec{q}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix},\ \vec{q}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$$

と定めると

$$(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = 0 \quad (i \neq j),\quad \|\vec{q}_j\| = 1 \quad (j = 1, 2, 3)$$

から Q が直交行列であることが分かる。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}$$

と変数変換を行なうと A が定める2次形式は

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) \underset{{}^tQ\text{は直交}}{=} \left({}^tQAQ \cdot {}^tQ\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, {}^tQ\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 0 & & \\ & 3 & \\ & & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix}\right) = 3\eta^2 + 6\zeta^2$$ となる。

(*) $A \in M_3(\mathbb{R})$ が対称で $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ が $\alpha \neq \beta$ を満たすとする

$$A\vec{p}_1 = \alpha\vec{p}_1,\ A\vec{p}_2 = \beta\vec{p}_2$$

$$\Longrightarrow \quad (\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0.$$