2015年 9月18日.

次元定理. $A: m \times n$ 行列とする.

$$\dim \mathrm{Ker}(A) = n - \dim \mathrm{Im}(A)$$

$\mathrm{Ker}(A)$ の基底を $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ とする これを延長して $\mathbb{R}^n$ の基底を

$$\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l, \vec{v}_{l+1}, \dots, \vec{v}_n$$

とする.

$$\vec{w}_{l+1} = A\vec{v}_{l+1}, \dots, \vec{w}_n = A\vec{v}_n$$

とおく. このとき $\vec{w}_{l+1}, \dots, \vec{w}_n$ が $\mathrm{Im}(A)$ の基底となる

(i) $\mathrm{Im}(A)$ は $\vec{w}_{l+1}, \dots, \vec{w}_n$ で生成される.

$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ は

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \dots + c_n\vec{v}_n$$

と書けるが

$$A\vec{v} = c_1 A\vec{v}_1 + \dots + c_l A\vec{v}_l + c_l A\vec{v}_{l+1} + \dots + c_n A\vec{v}_n$$

$$= c_{l+1}\vec{w}_{l+1} + \dots + c_n\vec{w}_n.$$

より (i) は OK.

(ii) $\vec{w}_{l+1}, \dots, \vec{w}_n$ は 1次独立である.

$$c_{l+1}\vec{w}_{l+1} + \dots + c_n\vec{w}_n = \vec{0}$$

とする 左辺 $= c_{l+1}A\vec{v}_{l+1} + \dots + c_n A\vec{v}_n$

$$= A(c_{l+1}\vec{v}_{l+1} + \dots + c_n\vec{v}_n)$$

となるので

$$c_{l+1}\vec{v}_{l+1} + \dots + c_n\vec{v}_{l+1} \in \mathrm{Ker}(A)$$

となる. $\mathrm{Ker}(A)$ の基底を用いて

$$c_{l+1}\vec{v}_{l+1}+\cdots+c_n\vec{v}_n=c_1\vec{v}_1+\cdots+c_l\vec{v}_l$$

と書けるが

$$c_1\vec{v}_1+\cdots+c_l\vec{v}_l+(-c_{l+1})\vec{v}_{l+1}+\cdots+(-c_n)\vec{v}_n=\vec{0}$$

より

$$c_{l+1}=\cdots=c_n=0$$

が従う.