2015年7月3日 小テスト問題

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -9 & 3 & 6 \\ 2 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & -13 & 3 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$ に対して $\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Im}(A)$ の基底を求める.

$$A \xrightarrow[\substack{1r \times \frac{1}{3} \\ 1r \times \frac{1}{2}}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & -13 & 3 & 8 \\ 1 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{2r += 1r \times (-1) \\ 3r += 1r \times (-1) \\ 4r += 1r \times (-1)}]{} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & -10 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{3r += 2r \times 2} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{2r \times \frac{1}{5}} \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{1r += 2r \times 3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(A) \iff \begin{cases} x + \frac{2}{5}z + \frac{1}{5}w = 0 \\ y - \frac{1}{5}z - \frac{3}{5}w = 0 \end{cases}$$

$z = \alpha$, $w = \beta$ とすると

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2}{5}\alpha - \frac{1}{5}\beta \\ \frac{1}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta \\ \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{5}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{\beta}{5}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ここにおいて $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ となるので

$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$ は $\mathrm{Ker}(A)$ の基底である

$$A = (\vec{a}_1\ \vec{a}_2\ \vec{a}_3\ \vec{a}_4),\quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{5} & -\frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = (\vec{e}_1\ \vec{e}_2\ \vec{e}_3\ \vec{e}_4)$$

とすると 基本行列 $P_1, \cdots, P_\ell$ により

$$P_\ell \cdots P_1 A = B$$

となるので 正則行列 $P = P_\ell \cdots P_1$ により

$$P \vec{a}_j = \vec{e}_j \quad (j = 1, 2, 3, 4)$$

が成立する.

$$\vec{e}_3 = \frac{2}{5}\vec{e}_1 - \frac{1}{5}\vec{e}_2,\quad \vec{e}_4 = \frac{1}{5}\vec{e}_1 - \frac{3}{5}\vec{e}_2$$

となるので、この2式の両辺に P^{-1} をかけると

$$\vec{a}_3 = \frac{2}{5}\vec{a}_1 - \frac{1}{5}\vec{a}_2,\quad \vec{a}_4 = \frac{1}{5}\vec{a}_1 - \frac{3}{5}\vec{a}_2$$

となる.

$$\sum_{j=1}^{4} c_j \vec{a}_j = \left(c_1 + \frac{2}{5}c_3 + \frac{1}{5}c_4\right)\vec{a}_1 + \left(c_2 - \frac{1}{5}c_2 - \frac{3}{5}c_3\right)\vec{a}_2$$

となるで $\mathrm{Im}(A)$ は $\vec{a}_1$ と $\vec{a}_2$ で生成される.

さらに

$$c_1\vec{a}_1 + c_2\vec{a}_2 = \vec{0}$$

とすると P を両辺にかけて

$$c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

より $c_1 = c_2 = 0$ が従うので $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ は1次独立である. よって $\mathrm{Im}(A)$ の基底として $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ が取れる.