定理 0.1. m 行 n 列の行列 $A \in M_{m,n}(\mathbf{K})$ に対して

$$\dim \ker(A) = n - \dim \mathrm{Im}(A)$$

が成立します.

Proof. $\ker(A)$ の基底を

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell$$

とします. これを $\mathbf{K}^n$ の基底として

$$\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \cdots, \vec{v}_n$$

と延長します. このとき

$$\vec{w}_{\ell+1} = A\vec{v}_{\ell+1}, \cdots, \vec{w}_n = A\vec{v}_n \tag{1}$$

が $\mathrm{Im}(A)$ の基底となることを示します. そのためにまず, (1) のベクトルが $\mathrm{Im}(A)$ を生成することを示します. 実際, 任意の $\vec{v} \in \mathbf{K}^n$ は

$$\vec{v} = c_1\vec{v}_1 + \cdots + c_n\vec{v}_n$$

と書けますが,

$$\begin{aligned} A\vec{v} &= c_1A\vec{v}_1 + \cdots + c_\ell A\vec{v}_\ell + c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + c_nA\vec{v}_n \\ &= c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + c_nA\vec{v}_n \end{aligned}$$

から $\mathrm{Im}(A)$ が $\vec{w}_{\ell+1} = A\vec{v}_{\ell+1}, \cdots, \vec{w}_n = A\vec{v}_n$ で生成されることが分かります.

次に (1) のベクトルが線型独立であることを証明します. そのために

$$c_{\ell+1}\vec{w}_{\ell+1} + \cdots + c_n\vec{w}_n = \vec{0} \tag{2}$$

を仮定します. このとき (2) の左辺は

$$\mathrm{LHS} = c_{\ell+1}A\vec{v}_{\ell+1} + \cdots + c_nA\vec{v}_n = A\left(c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \cdots + c_n\vec{v}_n\right)$$

とできますから

$$c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \cdots + c_n\vec{v}_n \in \ker(A)$$

であることが分かります. $c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \cdots + c_n\vec{v}_n$ を $\ker(A)$ の基底で表すと

$$c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \cdots + c_n\vec{v}_n = c'_1\vec{v}_1 + \cdots + c'_\ell\vec{v}_\ell$$

とできますが

$$c_{\ell+1}\vec{v}_{\ell+1} + \cdots + c_n\vec{v}_n - c'_1\vec{v}_1 - \cdots - c'_\ell\vec{v}_\ell = \vec{0}$$

として $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_\ell, \vec{v}_{\ell+1}, \cdots, \vec{v}_n$ の線型独立性を用いると

$$c_1 = \cdots = c_\ell = c'_{\ell+1} = \cdots = c'_n = 0$$

が従います．とくに

$$c_1 = \cdots = c_\ell = 0$$

であることが分かります．以上で $\vec{v}_{\ell+1}, \cdots, \vec{v}_n$ が線型独立であることが示されました．

以上で

$$\dim\ker(A) = \ell, \quad \dim\mathrm{Im}(A) = n - \ell$$

となりますので，定理が成立することが分かります．

□