2015/05/22

I　$\vec{a} = \begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$，$\vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ とします。$\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ の

$L(\vec{a}, \vec{b}) = \{ s\vec{a} + t\vec{b} \,;\, s, t \in \mathbb{R} \}$

への正射影を $\vec{w}$ とするとき

$$\vec{w} = P\vec{v}$$

となる3次正方行列 P を求めましょう。

II　$\vec{a} = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とします。$\vec{w}$ を $\vec{v} \in \mathbb{R}^2$ の $\vec{a}$ 方向

への正射影とします。このとき，$\vec{q} = \vec{v} + 2(\vec{w} - \vec{v})$
とするとき $= 2\vec{w} - \vec{v}$

$$\vec{q} = Q\vec{v}$$

を満たす行列 Q を求めましょう。さらに

$$\vec{a} = \begin{pmatrix}\cos\theta\\\sin\theta\end{pmatrix}$$

のとき Q を求めましょう。

III　$A = (\vec{a}_1 \cdots \vec{a}_n)$，$B = (\vec{b}_1 \cdots \vec{b}_n)$ を $m \times n$ 行列

とします

$$A\vec{v} = B\vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbb{K}^n)$$

ならば

$$A = B$$

となることを示しましょう。

IV　$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を実2次正方行列とします。

$$\|A\|^2 = a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{21}^2 + a_{22}^2$$

と定めます。

(1) $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\|A\vec{x}\| \leqq \|A\| \cdot \|\vec{x}\|$$

を示しましょう。

(2) A, B を実2次正方行列のとき、

$$\|AB\| \leqq \|A\| \cdot \|B\|$$

を示しましょう。

ヒント　三角不等式

$$\|\vec{x} + \vec{y}\| \leqq \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$$

V　$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう

VI　$A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ に対して A^n を求めましょう。

VII　$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ とします。

(1) $|\lambda I_2 - A| = 0$ を満たす λ を求めましょう。

(2) (1)の λ に対して

$$(\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を解きましょう。

(3) A を対角化して下さい。