2変数の2次関数

$$z = f(x, y) = ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + g$$

について考えます.

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$, $\vec{\beta} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$ と定めます.

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = \left(\begin{pmatrix} ax + cy \\ cx + by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right)$$

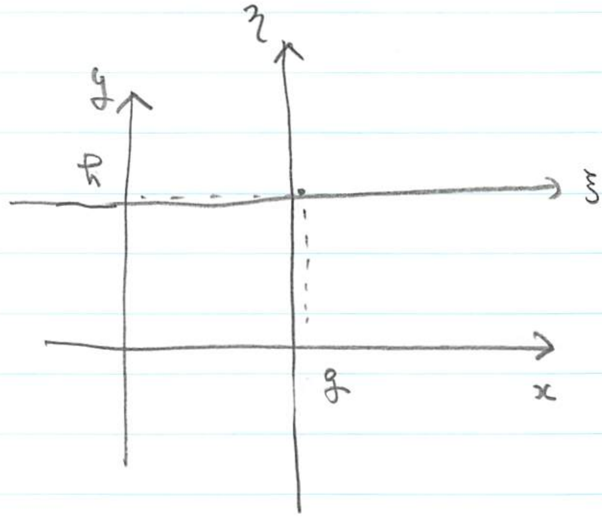
$$= x(ax + cy) + y(cx + by)$$

$$= ax^2 + 2cxy + by^2$$

であるので

$$f(x, y) = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + g$$

と表示されます.



$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - g \\ y - h \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換

をします.

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

として

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) + g$$

$$= \left(A\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha} \right) + g$$

$$\circledast \; = \left(A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \underset{(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})}{+} \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= \left(A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) + 2\left(A\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \right) \underset{(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})}{+} (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

となる. $|A| = ae - c^2 \neq 0$ であるとき.

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2} A^{-1} \vec{\beta}$$

とすると

$$A\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta} = \vec{0}$$

となるので 新たな座標では

$$z = \left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) + \overbrace{(\vec{\beta}, \vec{\alpha})}^{(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})} + g$$

$$= a\xi^2 + 2c\xi\eta + e\eta^2 + g'$$

と1次の項を消すことができる. さらに回転座標変換を用いると cross-term も消せるが, これはさらに勉強が必要となる. 最後に

$$g' = (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{\beta}, \vec{\alpha}\right) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \vec{g}$$

であることが分かる.

$$\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \left(\vec{\alpha}, A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$

となることを上の㊟で用いているが各自示そう. 実は転置を用いると明らかになる.

⊛ をたしかめます

$$= \left(A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)$$

$$+ \left(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{\beta}, \vec{\alpha}\right) + \delta$$

ですが

$$\left(A\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{定理 II.}}}{=} \left(\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ {}^tA = A}}{=} \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)$$

から分かります.

前回の演習 II

No. (　　)

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ とする

${}^tA = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ とするとき.

$$(A\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{v}, {}^tA\vec{w})$$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ とする. $A = (\vec{\alpha}\ \vec{\beta})$ とする. ${}^tA = \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha} \\ {}^t\vec{\beta} \end{pmatrix}$

に注意する.

$$\begin{aligned}
(A\vec{v}, \vec{w}) &= (v_1\vec{\alpha} + v_2\vec{\beta}, \vec{w}) \\
&= v_1(\vec{\alpha}, \vec{w}) + v_2(\vec{\beta}, \vec{w}) \\
&= \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} (\vec{\alpha}, \vec{w}) \\ (\vec{\beta}, \vec{w}) \end{pmatrix} \right) \\
&= \left(\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} {}^t\vec{\alpha}\,\vec{w} \\ {}^t\vec{\beta}\,\vec{w} \end{pmatrix} \right) \\
&= (\vec{v}, {}^tA\vec{w})
\end{aligned}$$

最後に $\underbrace{B = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}}_{2 \text{次正方行列}}$ に対して

$$B\vec{w} = \begin{pmatrix} a_1\vec{w} \\ b_1\vec{w} \end{pmatrix}$$

を用いている.