第8回 2次元の座標変換, 2次正方行列, 2変数の2次式.

(1) 座標変換

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

が条件

(1) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

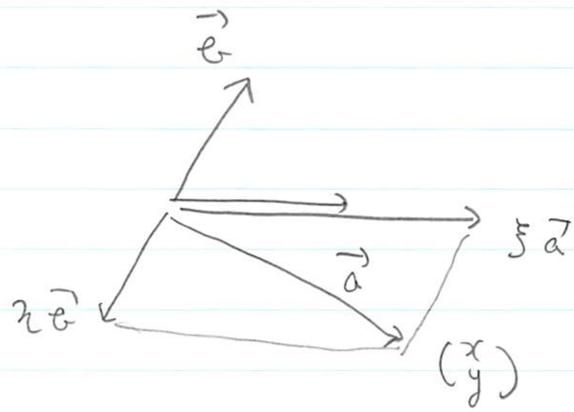
を満たしているとする。この条件は

(2)
$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \neq 0$$

と必要十分であることはすでに証明した。任意の2次元ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の1次結合を用いて

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{a} + \eta \vec{b}$$

と表すことを考える。



$$\begin{cases} \xi a_1 + \eta b_1 = x \\ \xi a_2 + \eta b_2 = y \end{cases}$$

において(2)が成立するので

$$\xi = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} x & b_1 \\ y & b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{D} (x b_2 - y b_1)$$

$$\eta = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & x \\ a_2 & y \end{vmatrix} = \frac{1}{D} (-x a_2 + y a_1)$$

とすればよいことが分かる。以上から写像

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} \longmapsto \xi \vec{a} + \eta \vec{b}$$

が全射であることが示されたが, 以上のように φ は単射

であることも示される．そのために (1) は定義によると

$$c_1\vec{a}+c_2\vec{b}=\vec{0} \Rightarrow c_1=c_2=0$$

であることに注意しよう．

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{pmatrix}\right)=\varphi\left(\begin{pmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{pmatrix}\right)$$

とあると

$$\xi_1\vec{a}+\eta_1\vec{b}=\xi_2\vec{a}+\eta_2\vec{b}$$

より

$$(\xi_1-\xi_2)\vec{a}+(\eta_1-\eta_2)\vec{b}=\vec{0}$$

となるので

$$\xi_1=\xi_2,\ \eta_1=\eta_2 \quad \text{i.e.} \quad \begin{pmatrix}\xi_1\\ \eta_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\xi_2\\ \eta_2\end{pmatrix}$$

が従うからである．

この φ を $\vec{a},\vec{b}$ による座標変換と呼ぼう．

(2) 2次正方行列

$$A=(\vec{a}\ \vec{b})=\begin{pmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{pmatrix}$$

を列ベクトル $\vec{a},\vec{b}$ を束ねる (bundle) 2次正方行列と呼ぶ．

A には2次元列ベクトルを掛けることが出来る．

$$A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}=\xi\vec{a}+\eta\vec{b}=\begin{pmatrix}\xi a_1+\eta b_1\\ \xi a_2+\eta b_2\end{pmatrix}$$

さらに次のように

$$C=(\vec{c}\ \vec{d})=\begin{pmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{pmatrix}$$

を A にかけることができる．

$$AC = A(\vec{c}\ \vec{d}) = (A\vec{c}\ \ A\vec{d})$$
$$= (c_1\vec{a} + c_2\vec{b}\ \ \ d_1\vec{a} + d_2\vec{b})$$

以上から

2次正方行列 × 2次正方行列 = 2次正方行列

が示された。まず A に 2次元ベクトルを掛ける場合の性質を考える

<u>定理</u> (1) $\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$ に対して
$$A(\vec{v} + \vec{w}) = A\vec{v} + A\vec{w}$$

(2) $A(\lambda\vec{v}) = \lambda(A\vec{v})$

$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$A(\vec{v} + \vec{w}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}$$
$$= (v_1 + w_1)\vec{a} + (v_2 + w_2)\vec{b}$$
$$= (v_1\vec{a} + v_2\vec{b}) + (w_1\vec{a} + w_2\vec{b}) \quad (1)$$

$$A(\lambda\vec{v}) = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$
$$= \lambda v_1\vec{a} + \lambda v_2\vec{b}$$
$$= \lambda(v_1\vec{a} + v_2\vec{b}) = \lambda(A\vec{v})$$

<u>系</u> $A(\lambda\vec{v} + \mu\vec{w}) = \lambda A\vec{v} + \mu A\vec{w}$.

行列の積についてはいろいろ示すことはあるが次の
結合則は重要である(ないと行列の演算は無用になる)

定理 (1) $(AC)\vec{v} = A(C\vec{v})$

(2) F を2次正方行列とすると

$$(AC)F = A(CF)$$

(証明)

(1) (右辺) $= A(v_1\vec{c}+v_2\vec{d})$

$$= v_1A\vec{c}+v_2A\vec{d}$$

$$= (A\vec{c}\ \ A\vec{d})\begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} = (AC)\vec{v}$$

(2) $F=(\vec{f_1}\ \vec{f_2})$ とすると

(左辺) $= \left((AC)\vec{f_1}\ \ (AC)\vec{f_2}\right) = \left(A(C\vec{f_1})\ \ A(C\vec{f_2})\right)$

$$= A(C\vec{f_1}\ \ C\vec{f_2}) = A(CF)$$

続いて和とスカラー倍について考えよう。

$$\lambda A = \lambda(\vec{a}\ \ \vec{b}) = (\lambda\vec{a}\ \ \lambda\vec{b})$$

$$A+C = (\vec{a}\ \ \vec{b})+(\vec{c}\ \ \vec{d}) = (\vec{a}+\vec{c}\ \ \vec{b}+\vec{d})$$

特殊な行列をいくつか準備しよう.

$$O_2 = (\vec{0}\ \vec{0}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$I_2 = (\vec{e_1}\ \vec{e_2}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

をそれぞれ零行列, 単位行列と呼ぶ. 2次正方行列 A に対して

$$A O_2 = O_2 A = O_2$$

$$A I_2 = I_2 A = A$$

となる. O_2 に関する等式は明らかであろう. 単位行列については

$$A\vec{e_1} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\cdot\vec{a} + 0\cdot\vec{b} = \vec{a}$$
$$A\vec{e_2} = (\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\cdot\vec{a} + 1\cdot\vec{b} = \vec{b}$$

より

$$A I_2 = (A\vec{e_1}\ A\vec{e_2}) = (\vec{a}\ \vec{b}) = A.$$

また

$$I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

より $\underline{I_2\vec{v} = \vec{v} \quad (\vec{v} \in \mathbb{R}^2)}$ が成り立するので

$$I_2 A = I_2(\vec{a}\ \vec{b}) = (I_2\vec{a}\ I_2\vec{b}) = (\vec{a}\ \vec{b}) = A.$$

も分かります.

以下 $M_2(\mathbb{R})$ を 2次正方行列の全体の集合とする

Aに対して

$$AX = XA = I_2$$

を満たす2次正方行列 X が存在するとき A を正則と呼びます。このとき X は唯一つ決まります。

$$AX = XA = I_2$$
$$AY = YA = I_2$$

を満たす $X, Y \in M_2(\mathbb{R})$ が存在するとします。

$$AX = I_2$$

に左から Y を掛けると

$$\begin{cases} Y(AX) = YI_2 = Y \\ = (YA)X = I_2X = X \end{cases}$$

と $X = Y$ が従います。この X を A^{-1} とします。

$|A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} |A| & 0 \\ 0 & |A| \end{pmatrix}$$

より $X = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} b_2 & -b_1 \\ -a_2 & a_1 \end{pmatrix}$ と定めると

$$AX = XA = I_2$$

が分かります。よって次の定理を示しました。

<u>定理</u>　$A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して $|A| \neq 0$ であるとき A は正則で $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ のとき $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

実は逆も成立して次の定理が成立します.

定理 Aが正則ならば $|A| \neq 0$.

Aが正則とする.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b} = \vec{0}$$

とします. この両辺に A^{-1} を掛けると

$$\begin{aligned} A^{-1}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) &= A^{-1}\vec{0} = \vec{0} \\ &\parallel \\ (A^{-1}A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= I_2\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となります. これより $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ から $|\vec{a}\ \vec{b}| \neq 0$ が従います.

以上より次の定理が示せました.

定理 $A \in M_2(\mathbb{R})$ に対して以下は同値

(1) Aは正則

(2) $|A| \neq 0$

(3) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

(3)′ $A = (\vec{a}\ \vec{b})$ とすると $\vec{a} \nparallel \vec{b}$

(4) $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$ と行ベクトルを定めると $a_1 \nparallel b_1$

(5) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \quad \vec{v} \longmapsto A\vec{v}$

は全射.

(5) を (2) から導きましたが, (5) から他の条件を導くのは演習とします.

2変数の2次関数

$$z = f(x,y) = ax^2 + 2cxy + by^2 + dx + ey + f$$

について考えます．

$$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix},\quad \vec{\beta} = \begin{pmatrix} d \\ e \end{pmatrix}$$ と定めます．

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix} ax + cy \\ cx + by \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

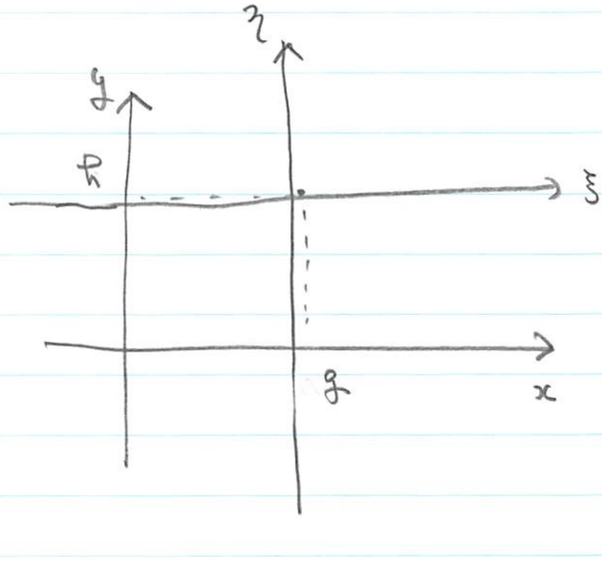
$$= x(ax + cy) + y(cx + by)$$

$$= ax^2 + 2cxy + by^2$$

であるので

$$f(x,y) = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f$$

と表示されます．



$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - g \\ y - h \end{pmatrix}$$

と平行移動の座標変換をします．

$$\vec{\alpha} = \begin{pmatrix} g \\ h \end{pmatrix}$$

して

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) + f$$

$$= \left(A\left(\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right), \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \vec{\alpha}\right) + f$$

⊛ $$= \left(A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) + \underbrace{\left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right)}_{(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})} + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + f$$

$$= \left(A\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) + 2\left(A\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) + \underbrace{(\vec{\beta}, \vec{\alpha})}_{(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha})} + f$$

となる． $|A| = ae - c^2 \neq 0$ であるとき，

$$\vec{\alpha} = -\frac{1}{2}A^{-1}\vec{\beta}$$

とすると

$$A\vec{\alpha} + \frac{1}{2}\vec{\beta} = \vec{0}$$

となるので新たな座標では

$$z = \left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) + (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= a\xi^2 + 2c\xi\eta + e\eta^2 + g'$$

と1次の項を消すことができる．さらに回転座標変換を用いるとcross-termも消せるが，これはさらに勉強が必要となる．最後に

$$g' = (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= \left(-\frac{1}{2}\vec{\beta}, \vec{\alpha}\right) + (\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= \frac{1}{2}(\vec{\beta}, \vec{\alpha}) + g$$

$$= (A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}) + \vec{g}$$

であることが分かる．

$$\left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) = \left(\vec{\alpha}, A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$

となることを上の㊟で用いているが各自示そう．実は転置を用いると明らかになる．

⊛ はこうです

$$= \left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) + \left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) + \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$

$$+ \left(A\vec{\alpha}, \vec{\alpha}\right) + \left(\vec{\beta}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right) + \left(\vec{\beta}, \vec{\alpha}\right) + \gamma$$

ですが

$$\left(A\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, \vec{\alpha}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ \text{定理 II}}}{=} \left(\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}, {}^tA\vec{\alpha}\right) \underset{\substack{\uparrow\\ {}^tA = A}}{=} \left(A\vec{\alpha}, \begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}\right)$$

から分かります.