5月1日のVIIIの解答.

(#) $|A|=0 \iff A\vec{v}=\vec{0}$ をみたす $\vec{v}\neq\vec{0}$ が存在する

であることを用いる.

$|A|=0$ とすると $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

が全射でないことを示せばよい. これは $|A|=0$ ならば

$$\mathrm{Im}(\varphi) \subsetneq \mathbb{R}^2$$

を示すことと同値である. (#) を用いると

$$A\vec{v_0}=\vec{0},\ \vec{v_0}\neq\vec{0}$$

を満たす $\vec{v_0}$ が存在する. $\vec{q}\in\mathbb{R}^2$ で

$$|\vec{v_0}\ \vec{q}| \neq 0$$

であるものが存在するので. ←を自示せるか?

任意の $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (\vec{v_0}\ \vec{q})\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

をみたす $\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$ が存在する.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi A\vec{v_0} + \eta A\vec{q} = \eta A\vec{q}$$

より

$$\mathrm{Im}(\varphi) \subset \{tA\vec{q}\ ;\ t\in\mathbb{R}\} \subsetneq \mathbb{R}^2$$

より $\mathrm{Im}(\varphi) \subsetneq \mathbb{R}^2$ が示された.

補足.

もし 2次正方行列 $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ に対して

$$|AB| = |A| \cdot |B|$$

であることが分かっていると次のように示すことができる.

φ が全射であるので

$$\varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi(\vec{y}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^2$ が存在する

$$A(\vec{x} \ \vec{y}) = (A\vec{x} \ \ A\vec{y}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$|A| \cdot |X| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

が従う. よって $|A| \neq 0$ である.