第6回 レジュメ.

準備 2変数の連立1次方程式

$$\# \begin{cases} ax+by=\alpha & \cdots ① \\ cx+dy=\beta & \cdots ② \end{cases}$$

について考えよう. ①×d − ②×b ; ①×c − ②×a より

$$\begin{array}{rrcl} & adx + bdy & = & \alpha d \\ -) & bcx + bdy & = & \beta b \\ \hline & (ad-bc)x & = & \alpha d - \beta b \quad \cdots ③ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrcl} & acx + bcy & = & \alpha c \\ -) & acx + ady & = & \beta a \\ \hline & (bc-ad)y & = & \alpha c - \beta a \quad \cdots ④ \end{array}$$

ここで 2次の行列式

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

と定義すると ③, ④は

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix} & \cdots ③' \\ \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix} & \cdots ④' \end{cases}$$

クラメールの公式 $D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき $\#$ の解は

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} c & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

$\alpha = \beta = 0$ のとき, を考えると

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \left(\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \right)$$

実は逆も成立する.

定理1.(1) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow \left(\begin{cases} ax+by=0 \\ cx+dy=0 \end{cases} \Rightarrow x=y=0 \right)$

(2) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 0 \iff \left(\begin{array}{l} \text{ある } (x, y) \neq (0, 0) \text{ に対して} \\ \quad \begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \\ \text{が成立する} \end{array} \right)$

$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ とすると。

$\boxed{\text{(2)において} \Rightarrow \text{を示す。線型代数 15p.}}$

$$x\vec{a} + y\vec{b} = \begin{pmatrix} x a_1 + y b_1 \\ x a_2 + y b_2 \end{pmatrix}$$

であることに注意すると

定理は次のように言い換えることができる

<u>定理2.</u> $|\vec{a}\ \ \vec{b}| \neq 0 \iff (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0)$

$|\vec{a}\ \ \vec{b}| = 0 \iff$ ある $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ に対して $\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0}$.

以下、

$\vec{a} \nparallel \vec{b} \underset{\text{定義}}{\iff} (\lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0)$

$\vec{a} \parallel \vec{b} \underset{\text{定義}}{\iff} \left(\begin{array}{l} \text{ある } (\lambda, \mu) \neq (0, 0) \text{ に対して} \\ \qquad \lambda\vec{a} + \mu\vec{b} = \vec{0} \end{array} \right)$

とする(この定義は $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ でも使うことにしよう。また行ベクトルに対しても用いることができる。)

ここで

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{転置では} \quad \begin{vmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{vmatrix} = |{}^t\mathbf{a}\ \ {}^t\mathbf{b}|$$

であることに注意しておく。これを用いると、行ベクトル

$\mathbf{a} = (a_1\ \ a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1\ \ b_2)$ に対して

$\mathbf{a} \nparallel \mathbf{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\mathbf{a} \parallel \mathbf{b} \iff \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

が分かる

平面の交わり　平面については共通資料で説明する

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = \alpha_1 & \cdots ① \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = \alpha_2 & \cdots ② \end{cases}$$

において $\vec{p_1} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$, $\vec{p_2} = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$ を ①, ② の法線ベクトルとする. もちろん $\vec{p_1} \neq \vec{0}$, $\vec{p_2} \neq \vec{0}$ とする.

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ とすると ①, ② から. クラメールを用いて

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -c_1 z + \alpha_1 & b_1 \\ -c_2 z + \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{-1}{D} z \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & -c_1 z + \alpha_1 \\ a_2 & -c_2 z + \alpha_2 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{1}{D} z \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} + \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}$$

とする　ここで行列式に関するいくつかの性質を用いている.

(i) 多重線形性

$$\begin{vmatrix} \lambda \vec{a} + \mu \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \lambda \vec{b} + \mu \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

(ii) 交代性

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} \end{vmatrix}$$

上の結果を用いると $t = -\frac{z}{D}$ とパラメータを定めると、

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} + \frac{1}{D} \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 \\ \alpha_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 \\ a_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} \\ 0 \end{pmatrix}$$

が導かれる。

$$\vec{p_1} \times \vec{p_2} = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

と定める（$\vec{p_1}$ と $\vec{p_2}$ の外積）

以上の計算は $\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ or $\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$ の場合も

同様で交わりは方向ベクトルが $\vec{p_1} \times \vec{p_2}$ の直線となる。

ここで

$$(\star) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ or } \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ or } \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0$$

と仮定すると

$$\begin{cases} a_1 \lambda + a_2 \mu = 0 \\ b_1 \lambda + b_2 \mu = 0 \\ c_1 \lambda + c_2 \mu = 0 \end{cases} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$$

すなわち $\lambda \vec{p_1} + \mu \vec{p_2} = \vec{0} \Longrightarrow \lambda = \mu = 0$ (i.e. $\vec{p_1} \not\parallel \vec{p_2}$)

が成立することに注意しよう。実は（$\star$）は $\vec{p_1} \times \vec{p_2} \neq \vec{0}$ と必要十分である。

実はさらに次の定理4が成立する.

定理4. (1) $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 \neq \vec{0} \iff \vec{p}_1 \not\parallel \vec{p}_2$

(2) $\vec{p}_1 \times \vec{p}_2 = \vec{0} \iff \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$

---

(1)において ($\Rightarrow$) はすでに示されているので ($\Leftarrow$) を示すことになる. 実はこの時点で示すのは面倒になるので証明は先延ししよう (実ベクトルに限ると外積の性質から直観的に分かる) 注

注 $A : m \times n$ 行列に対し

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}({}^tA)$$

であることと関係している

2点 加

演習VII (1)の後半で $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ に対し

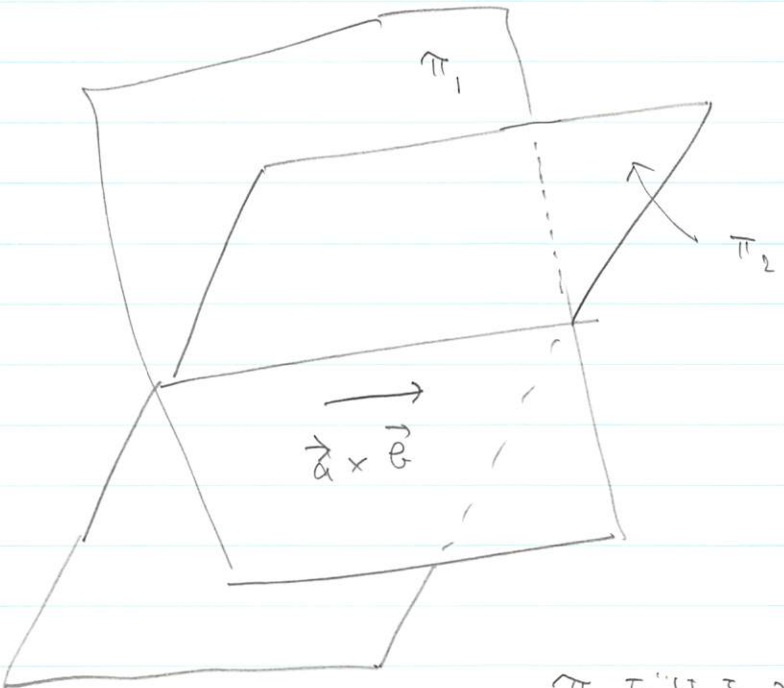
$$(\vec{a}\times\vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a}\times\vec{b}, \vec{b}) = 0$$

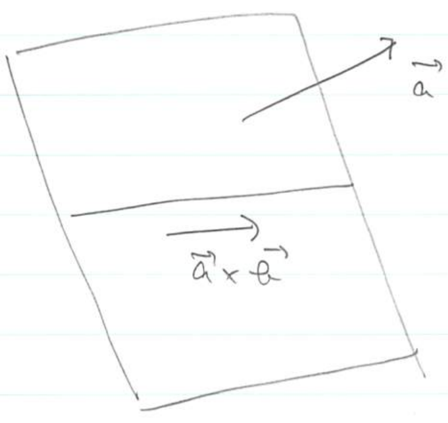
であることを示した。

$\vec{a} \nparallel \vec{b}$ すなわち $\vec{a}\times\vec{b} \neq \vec{0}$ のとき これは以下の様に直観的に示される。

$$\begin{cases} \pi_1 : a_1 x + a_2 y + a_3 z + \alpha = 0 \\ \pi_2 : b_1 x + b_2 y + b_3 z + \beta = 0 \end{cases}$$

は直線がその交わりとなり $\vec{a}\times\vec{b}$ が方向ベクトルとなった





π_1 だけをみると明らかに

$$\vec{a}\times\vec{b} \perp \vec{a}$$

が分かるであろう。

内積について

$\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ に対して

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{x}, \vec{y}) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

と定める。また

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

とする。

定理 5. $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{z}) + (\vec{y}, \vec{z})$$

$$(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x}, \vec{y}) + (\vec{x}, \vec{z})$$

$$(\lambda \vec{x}, \vec{y}) = (\vec{x}, \lambda \vec{y}) = \lambda (\vec{x}, \vec{y})$$

$$(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{y}, \vec{x})$$

$$\|\lambda \vec{x}\| = |\lambda| \cdot \|\vec{x}\|$$

$$\|\vec{x}\| \geqq 0, \quad \|\vec{x}\| = 0 \iff \vec{x} = \vec{0}$$

定理 6

$$\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2$$

$\vec{a} \neq \vec{0}$ とすると

$$\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2$$

を最小にする t を求めてみよう。

$$\|\vec{b} - t\vec{a}\|^2 = t^2 \|\vec{a}\|^2 - 2t(\vec{a}, \vec{b}) + \|\vec{b}\|^2$$
$$= \|\vec{a}\|^2 \left(t - \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{\|\vec{a}\|^2} \right)^2 + \|\vec{b}\|^2 - \frac{(\vec{a}, \vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

$$= \|\vec{a}\|^2 \left(t - \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\right)^2 + \frac{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

より $t = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}$ のとき 最小値 $\dfrac{\|\vec{a}\|^2 \cdot \|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2}$

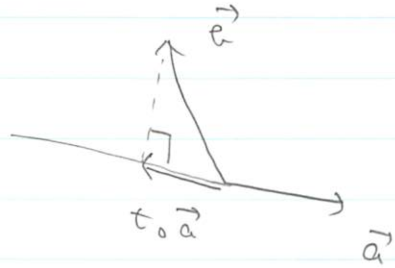
をとります. $t_0 = \dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}$ とすると

$$\begin{aligned}(\vec{b} - t_0\vec{a}, \vec{a}) &= (\vec{b},\vec{a}) - t_0 \|\vec{a}\|^2 \\ &= (\vec{a},\vec{b}) - \frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\|\vec{a}\|^2 \\ &= (\vec{a},\vec{b}) - (\vec{a},\vec{b}) = 0\end{aligned}$$

より

$$\vec{b} - t_0\vec{a} \perp \vec{a}$$

が分かる.



$$\frac{(\vec{a},\vec{b})}{\|\vec{a}\|^2}\vec{a}$$

のことを $\vec{b}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影(直交射影)と呼びます.

$t = t_0$ のとき.

$$0 \leq \|\vec{b} - t_0\vec{a}\|^2 = \frac{\|\vec{a}\|^2\|\vec{b}\|^2 - (\vec{a},\vec{b})^2}{\|\vec{a}\|^2}$$

より 次の定理が導かれます.

<u>定理7.</u> (コーシー・シュヴァルツの不等式.)

$\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$|(\vec{a},\vec{b})| \leqq \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|$$