第6回 練習問題

I　$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\|^2 = \|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2+\|\vec{c}\|^2 + 2(\vec{a},\vec{b})+2(\vec{b},\vec{c})+2(\vec{c},\vec{a})$$

を示しましょう.

(線形 13p. 演習 1.17)

II　$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$ がすべての $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ に対し垂直とします.

すなわち　$(\vec{a},\vec{x}) = 0 \quad (\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n)$

が成立するとします. このとき, $\vec{a}=\vec{0}$ であることを示しましょう

(線形 13p. 演習 1.19)

III　$\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3} \in \mathbb{R}^n$ が

$$(\vec{f_i}, \vec{f_j}) = \begin{cases} 1 & (i=j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

を満たすとします.

(1)
$$\|x\vec{f_1}+y\vec{f_2}\|^2 = x^2+y^2$$
$$\|x\vec{f_1}+y\vec{f_2}+z\vec{f_3}\|^2 = x^2+y^2+z^2$$

(2)　$g \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\|\vec{g}-x\vec{f_1}-y\vec{f_2}\|^2 = \|\vec{g}\|^2+x^2+y^2 -2x(\vec{g},\vec{f_1})-2y(\vec{g},\vec{f_2})$$

であることを示しましょう.

IV

$$\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x-y+z=-1 \end{cases}$$

を満たす (x, y, z) があるとき クラメールの公式を用いて x, y を z で表しましょう.

V $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ に対して

$\| \vec{a} - t\vec{b} \|^2$ を最小にする t を求めましょう.

VI $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\vec{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とします

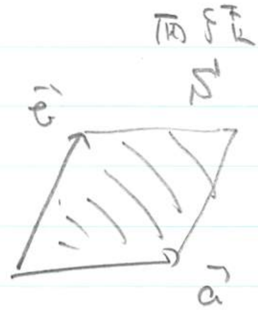
(1) $(\vec{a}, \vec{b}) = 0$ を示しましょう

(2) $\| \vec{c} - x\vec{a} - y\vec{b} \|^2$ を最小にする x, y を求めましょう.

VII. (1) $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ とする $\vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0}$ のとき $\vec{a}, \vec{b}$ が作る平行四辺形の面積は

$$\| \vec{a} \times \vec{b} \|$$

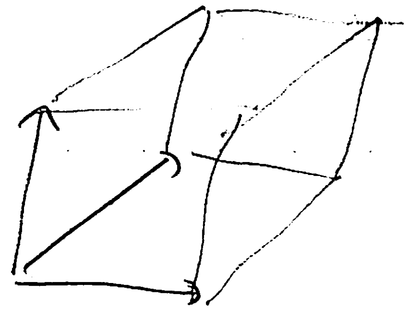
であることを示しましょう.



$$(\vec{a} \times \vec{b}, \vec{a}) = (\vec{a} \times \vec{b}, \vec{b}) = 0$$

を示しましょう.

(2) $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ とします．
この3つのベクトルが作る
平行六面体の体積が



$$|\langle \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c} \rangle|$$

で与えられることを示しましょう

VIII $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ とします 以下を示しましょう．

(1) $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$, $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$

(2) $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

IX 直線 l_1 $\begin{cases} x + y + z + 1 = 0 \\ 3x - 2y + z + 5 = 0 \end{cases}$

直線 l_2 $\begin{cases} x - z + 1 = 0 \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases}$

がある．原点を通り l_1, l_2 と交わる直線を求めましょう．

X 次の3点を通る平面の方程式を求めよ

(1) $(0, 0, 0)$, $(1, 2, 3)$, $(4, 5, 6)$

(2) $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(0, 0, 4)$

(3) $(1, 2, 3)$, $(-1, 1, 0)$, $(2, -3, 5)$

×1　$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ とする 平面　$ax + by + cz + d = 0$

δ

と点 (x_0, y_0, z_0) の距離の公式を導け.

$$\delta = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$