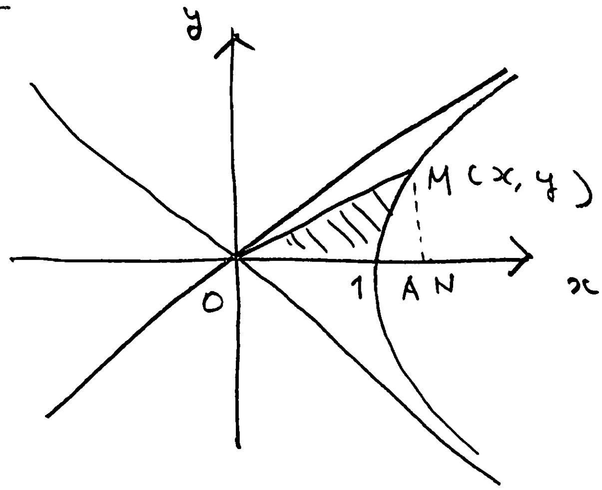
双曲線のパラメータ表示について



$$x^2 - y^2 = 1$$

のパラメーター表示を考える 斜線部の面積を S とすると

$$S = \triangle OMN -$$ 

$$= \frac{1}{2} xy - \int_1^x y\,dx$$

$$= \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \sqrt{s^2-1}\,dt.$$

である.

$$I = \int_1^x \sqrt{s^2-1}\,ds = \left[s\sqrt{s^2-1}\right]_1^x - \int_1^x \frac{s^2}{\sqrt{s^2-1}}\,ds$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - \int_1^x \frac{s^2-1}{\sqrt{s^2-1}}\,ds - \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$$

$$= x\sqrt{x^2-1} - I - \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$$

より

$$I = \frac{1}{2} x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$$

と $\int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$ の計算に帰着される.

$J = \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}}$ は $t = s + \sqrt{s^2-1}$ と変数変換して計算する

$$\sqrt{s^2-1} = t - s$$

の両辺を自乗すると

$$s^2 - 1 = t^2 - 2ts + s^2$$

より $s = \frac{t^2-1}{2t} = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{t}\right)$ ← s を t で表す.

$$\sqrt{s^2-1} = t - \frac{t^2+1}{2t} = \frac{t^2-1}{2t}$$ となり

$$ds = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

となる

$$J = \int_1^x \frac{ds}{\sqrt{s^2-1}} = \int_1^{x+\sqrt{x^2-1}} \frac{2t}{t^2-1}\cdot\frac{t^2-1}{2t^2}\,dt$$

$$= \int_1^{x+\sqrt{x^2-1}} \frac{1}{t}\,dt = \log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

となるので

$$I = \frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1} - \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

となる。よって

$$S = \frac{1}{2}\log\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$$

となる。

$$S = \frac{t}{2}$$ とすると。

$$e^t = x+\sqrt{x^2-1}$$

$$e^{-t} = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}} = x-\sqrt{x^2-1}$$

の2つを考えると

$$x = \frac{1}{2}\left(e^t+e^{-t}\right) = \cosh t$$

$$y = \sqrt{x^2-1} = \sinh t$$

を得る。