第2回 複素数と代数学の基本定理. (その2)

以下では $\mathbb{K}$ として $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表すとする.
$\mathbb{K}[x]$ とすると $\mathbb{K}$ を係数とする多項式全体の集合である.

3.3. 多項式の次数.

1) $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ が $P(x) \neq 0$ とする.

$$(*)\quad P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$
$$a_n \neq 0$$

であるとき P の次数を n とする.

$$\deg(P) = n.$$

2) $P(x) = 0$ のとき

$$\deg(P) = -\infty$$

とする.

3) $P, Q \in \mathbb{K}[x]$ のとき.

$$\deg(PQ) = \deg(P) + \deg(Q) \qquad (1)$$

が成立する.

P が上の$(*)$で Q が

$$Q = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0$$

のとき

$$PQ = a_n b_m x^{n+m} + \cdots + c_l x^l + \cdots + c_1 x + c_0$$

但し

$$c_l = \sum_{i+j=l} a_i b_j$$

となることから (1) は示される.

4) (剰余定理) $P(x), D(x) \in \mathbb{K}[x]$ で $\deg(D) \geq 1$ とする。このとき

$$(2) \begin{cases} P(x) = D(x)Q(x) + R(x) \\ \deg(R(x)) < \deg(D(x)) \end{cases}$$

を満たす $Q(x), R(x) \in \mathbb{K}[x]$ がただ一つ存在する。

(証明) 存在について

(i) $\deg P(x) < \deg D(x)$ であるとき。

$$\begin{cases} P(x) = 0 \cdot D(x) + P(x) \\ \deg(P(x)) < \deg(D(x)) \end{cases}$$

であるので

$$Q(x) = 0, \quad R(x) = D(x)$$

で (2) が成立する。

(ii) $n = \deg P(x) \geqq \deg D(x) = m$ として $(n-1)$ 次以下の $P(x)$ に対しては証明されているとする。

$$D(x) = b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0, m \geqq 1)$$
$$P(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

とする。

$$S(x) = P(x) - a_n b_m^{-1} x^{n-m} D(x)$$

とすると $\deg(S(x)) \leq n-1$

であるので

$$\begin{cases} S(x) = Q_1(x) D(x) + R(x) \\ \deg R < \deg D \end{cases}$$

を満たす $Q_1, R \in \mathbb{K}[x]$ が存在する。このとき

$$P(x) = (a_n b_m^{-1} x^{n-m} + Q_1(x)) D(x) + R(x)$$

より

$$Q(x) = a_n b_m^{-1} x^{n-m} + Q_1(x)$$

に対して (2) が成立する。

（一意性）

$$P(x) = Q(x)D(x) + R(x)$$
$$= Q_1(x)D(x) + R_1(x)$$
$$\deg R < \deg D,\ \deg R_1 < \deg D_1$$

が成立するとする。

$$(Q(x) - Q_1(x))D(x) = R_1(x) - R(x)$$

が成立する。

$R \neq R_0$ とすると $Q(x) - Q_1(x) \neq 0$ で （注）

$$\deg D > \deg(R_1 - R_0) = \deg(Q - Q_1) + \deg D$$
$$\geq \deg D.$$

より矛盾となる。よって $R_1 = R$。さらに $D \neq 0$ より
$Q - Q_1 = 0$ すなわち $Q = Q_1$ が従う。

$\square$

定理（因数定理） $P(x) \in \mathbb{K}[x]$, $\alpha \in \mathbb{K}$ とする

$$P(\alpha) = 0 \iff x - \alpha \text{ は } P(x) \text{ を割る.}$$

（$\Rightarrow$）
$$\begin{cases} P(x) = (x-\alpha)Q(x) + \beta \\ Q \in \mathbb{K}[x],\ \beta \in \mathbb{K} \end{cases}$$

と割り算する。

$$0 = P(\alpha) = 0 \cdot Q(\alpha) + \beta = \beta$$

より $\beta = 0$ となるので $P(x) = (x-\alpha)Q(x)$ となる。

（$\Leftarrow$） 明らか。

（注） $P_1, P_2 \in \mathbb{K}[x]$ において $P_1 P_2 = 0 \Rightarrow P_1 = 0$ または $P_2 = 0$
が成立することを用いている。演習 II を見よ。

定理 $P(x) \in \mathbb{K}[x]$ が n 次以下とする。$\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{K}$ が

$$\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$$

$$P(\alpha_i) = 0 \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

を満たすとする。このとき

$$P(x) = 0$$

となる。

$P(\alpha_1) = 0$ より

$$P(x) = (x - \alpha_1) P_1(x)$$

となる。

$P(\alpha_2) = 0$ より

$$P(\alpha_2) = (\alpha_2 - \alpha_1) P_1(\alpha_2) = 0$$

において $\alpha_2 \neq \alpha_1$ より $P_1(\alpha_2) = 0$ となるので

$$P_1(x) = (x - \alpha_2) P_2(x), \quad P_2(x) \in \mathbb{K}[x]$$

となる

$i \leq n-1$ において

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_i) P_i(x), \quad P_i(x) \in \mathbb{K}[x]$$

となるとすると

$$P(\alpha_{i+1}) = (\alpha_{i+1} - \alpha_1) \cdots (\alpha_{i+1} - \alpha_i) P_i(\alpha_{i+1})$$
$$= 0$$

より $P_i(\alpha_{i+1}) = 0$ が従うことから

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{i+1}) P_{i+1}(x), \quad P_{i+1}(x) \in \mathbb{K}[x]$$

となる。帰納的に

$$P(x) = (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n) P_n(x)$$

となる。両辺の次数を比較すると

$$P_n(x) = \alpha \in \mathbb{K}$$

となる。ここで $x = \alpha_{n+1}$ を代入すると

$$0 = P(\alpha_{n+1}) = (\alpha_{n+1} - \alpha_1) \cdots (\alpha_{n+1} - \alpha_n) \alpha$$

より $\alpha = 0$ となる。