演習問題

(一) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して

$$|zw| = |z| \cdot |w|$$

を示せ

(二) (1) $a, b \in \mathbb{R}$, $a, b \geqq 0$ とする

$$a + b = 0 \iff a = b = 0$$

を示せ

(2) $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{R}$, $a_1, \cdots, a_n \geqq 0$ とする

$$a_1 + \cdots + a_n = 0 \iff a_1 = \cdots = a_n = 0$$

を示せ。

演習問題 2015年4月10日

I (1) $z, w \in \mathbb{C}$ に対して $\overline{z \pm w} = \overline{z} \pm \overline{w}$, $\overline{zw} = \overline{z} \cdot \overline{w}$

を示せ

(2) $z \neq 0$ のとき $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}$ を示せ.

(3) $z \in \mathbb{C}$ であるとき

$$z \in \mathbb{R} \Longleftrightarrow z = \overline{z}$$

を示せ.

(4) $f(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0 \in \mathbb{C}[z]$

とする. $a_n, a_{n-1}, \cdots, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ とすると.

$$f(\alpha) = 0 \Longrightarrow f(\overline{\alpha}) = 0$$

を示せ.

II $P_1(x), P_2(x) \in \mathbb{C}[x]$ とする

$$P_1(x) P_2(x) = 0 \Longrightarrow P_1(x) = 0 \text{ または } P_2(x) = 0$$

が成立することを示せ.

III $z, w \in \mathbb{C}$ が $z \neq 0$ かつ $w \neq 0$ を満たして

$$z = r_1 (\cos\theta_1 + i \sin\theta_1)$$
$$w = r_2 (\cos\theta_2 + i \sin\theta_2)$$

と極形式で表されるとき

$$zw = r_1 r_2 (\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2))$$

となることを示せ

$$z^{-1} = r_1^{-1} (\cos(-\theta_1) + i \sin(-\theta_1))$$

となることを示せ.

IV　$z = \cos\theta + i\sin\theta \neq 1$ とする．$z^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}$ とする．

(1)

$$1 + z + \cdots + z^n = \frac{z^n - 1}{z - 1} = \frac{z^n - 1}{z^{\frac{1}{2}}(z^{\frac{1}{2}} - z^{-\frac{1}{2}})}$$

を用いて

$$\sum_{k=0}^{n} \cos k\theta, \quad \sum_{k=1}^{n} \sin k\theta$$

を求めよ．

V　(1) $\alpha \neq \beta$, $\beta \neq \gamma$, $\gamma \neq \alpha$ とする．

$$g(x) = \frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}$$

は

$$g(\alpha) = 1, \quad g(\beta) = g(\gamma) = 0$$

を満たすことを示せ．

(2) (1) において $A, B, C \in \mathbb{C}$ とする．

f が2次関数で

$$f(\alpha) = A, \quad f(\beta) = B, \quad f(\gamma) = C$$

を満たすならば

$$f(x) = A\frac{(x-\beta)(x-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)} + B\frac{(x-\gamma)(x-\alpha)}{(\beta-\gamma)(\beta-\alpha)} + C\frac{(x-\alpha)(x-\beta)}{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}$$

となることを示せ．

補充問題

VI　$a, b \in \mathbb{R}$ とする.

$$f(x) = ax^4 - 2ax^3 + (a+1)x^2 - a - b$$

において

$$f\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right) = 0$$

とする

(1)　a, b を求めよ.　(2)　fの 4個の解を求めよ.

VII　$f(x) = x^{2n} + x^n + 1$ が $x^2 + x + 1$ で割り切れるか調べよ.

VIII　$\alpha = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$

とする.

(1)　$z^n - 1 = 0$ の解は $1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}$ であることを示せ

(2)　$(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1}) = n$

を示せ.

IX　$z^4 = 8(-1+\sqrt{3}i)$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ をすべて求めよ.