I　Q_1, Q_2 直交 $\Rightarrow$ $Q_1 Q_2$ も直交.

仮定より

$$\boxed{{}^tQ_1} Q_1 = Q_1 \boxed{{}^tQ_1} = I_n \quad \cdots ①$$

$$ {}^tQ_2 Q_2 = Q_2 {}^tQ_2 = I_n \quad \cdots ②$$

が成立する.

$$ {}^t(Q_1Q_2)\,Q_1Q_2 = {}^tQ_2 \boxed{{}^tQ_1 Q_1} Q_2 $$

$$ \underset{①}{=} {}^tQ_2 I_n Q_2 = {}^tQ_2 Q_2 \underset{②}{=} I_n $$

$$\boxed{\begin{aligned} &{}^t(AB) \\ &= {}^tB\,{}^tA \end{aligned}}$$

$(AB)C = A(BC)$
結合則.

$$ Q_1Q_2\,{}^t(Q_1Q_2) = Q_1 (Q_2\,{}^tQ_2)\,{}^tQ_1 = $$

$$ \underset{②}{=} Q_1 I_n\,{}^tQ_1 = Q_1\,{}^tQ_1 \underset{①}{=} I_n $$

より Q_1Q_2 は直交.

$Q \in M_n(\mathbb{R})$ が直交

$\iff {}^tQQ = Q\,{}^tQ = I_n$

$\iff (Q\vec{v}_1, Q\vec{v}_2) = (\vec{v}_1, \vec{v}_2) \quad (\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in \mathbb{R}^n)$

$\iff \boxed{{}^tQQ} = I_n$

$\iff Q = (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n)$ とすると

$$(\vec{q}_i, \vec{q}_j) = \begin{cases} 1 & (i = j) \\ 0 & (i \neq j) \end{cases}$$

($\vec{q}_1, \cdots, \vec{q}_n$ は正規直交系)

i行j列

$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{q}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{q}_n \end{pmatrix} (\vec{q}_1 \cdots \vec{q}_n) = \left({}^t\vec{q}_i\,\vec{q}_j \right)$$

$$= \left((\vec{q}_i, \vec{q}_j) \right)$$

$$(Q_1Q_2\vec{v}_1, Q_1Q_2\vec{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ Q_1 \text{ 直交}}}{=} (Q_2\vec{v}_1, Q_2\vec{v}_2) \underset{\substack{\uparrow \\ Q_2 \text{ 直交}}}{=} (\vec{v}_1, \vec{v}_2)$$

II $A \in M_n(\mathbb{R})$ 対称 かつ 正則 $\Longrightarrow$ A^{-1} も対称.
$\phantom{II A \in M_n(\mathbb{R})}$ ${}^tA = A$

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} A = I_n$$

が成立する　$A \cdot A^{-1} = I_n$ を転置　　　${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$

$$
\begin{aligned}
&{}^t(A A^{-1}) = {}^tI_n = I_n \\
&\quad \parallel \\
&{}^t(A^{-1})\,{}^tA \underset{\substack{\uparrow \\ A\text{対称}}}{=} {}^t(A^{-1}) A
\end{aligned}
$$

まとめると

$$ {}^t(A^{-1}) A = I_n $$

右から A^{-1} をかける　$$ {}^t(A^{-1}) \cdot A \cdot A^{-1} = I_n A^{-1} = A^{-1} $$

$$ \parallel $$

$$ {}^t(A^{-1}) \cdot I_n = {}^t(A^{-1}) $$

よって

$$ {}^t(A^{-1}) = A^{-1} $$

となるので A^{-1} は対称.

V: 分散行列 $= {}^tDD \qquad D = (\vec{r}_1 \cdots \vec{r}_n)$

対称.

$\vec{r}_1, \cdots, \vec{r}_n$ が 1次独立 $\Longleftrightarrow$ V 正則

$\Longleftrightarrow$ V 正定値

$\rightsquigarrow$ V^{-1}: 対称, 正定値.

$A \in M_n(\mathbb{R})$ 対称, 正則, 正定値 $\Longrightarrow$ A^{-1} 正則, 対称, 正定値

A: 正定値 $\Longleftrightarrow$ $(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$

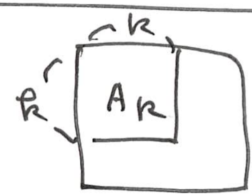
$\Longleftrightarrow$ $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)\cdots(\lambda - \alpha_n)$

とすると $\alpha_j > 0$.

$\Longleftrightarrow$ $|A_1| > 0, \ |A_2| > 0, \ \cdots, \ |A_n| > 0$

$|A_1| = a_{11}$

$\boxed{\begin{array}{l} A: 対称 \\ \Phi_A(\alpha) = 0 \Longrightarrow \alpha \in \mathbb{R} \end{array}}$



$\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$

$\exists P$: 直交 $\quad {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix}$

${}^tP = P^{-1}$

$\downarrow$

$$P^{-1}A^{-1}({}^tP)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}$$

$\parallel$

${}^tP A^{-1} P$

$$\left(A^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = ({}^tP A^{-1} \overbrace{P \cdot {}^tP}^{I_n = } \vec{x}, {}^tP \vec{x})$$

$\uparrow$ ${}^tP$ 直交

$$= \left(\begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{\alpha_n} \end{pmatrix}\vec{\xi}, \vec{\xi}\right) = \frac{1}{\alpha_1}\xi_1^2 + \cdots + \frac{1}{\alpha_n}\xi_n^2 > 0$$

$\vec{\xi} = {}^tP\vec{x}$

$\uparrow$

$\vec{\xi} \neq \vec{0}$

$\Updownarrow$

$\vec{x} \neq \vec{0}$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

$(ABC)^{-1}$

$= C^{-1}B^{-1}A^{-1}$

$A = {}^tBB$.　　$B := (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$ と行列.

Bのグラム行列

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{e}_1 \\ \vdots \\ {}^t\vec{e}_n \end{pmatrix} (\vec{e}_1 \cdots \vec{e}_n)$$

$$= ({}^t\vec{e}_i\, \vec{e}_j) = ((\vec{e}_i, \vec{e}_j))$$

$\uparrow$ i行j列.　　$\downarrow$ ${}^tBB$ 対称.

${}^t({}^tBB) = {}^tB\,{}^t({}^tB) = {}^tBB$. より ${}^tBB$ 対称.

$(A\vec{x}, \vec{x}) \geq 0$　　A が 非負定値 (半正定値)

$$= ({}^tBB\vec{x}, \vec{x}) = (B\vec{x}, B\vec{x}) = \|B\vec{x}\|^2 \geq 0.$$

正定値ということは　$\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow (A\vec{x}, \vec{x}) = \|B\vec{x}\|^2 \neq 0$

$\Updownarrow$

$B\vec{x} \neq \vec{0}$

${}^tBB$
$\parallel$
A: 正定値 $\Leftrightarrow (\vec{x} \neq \vec{0} \Rightarrow B\vec{x} \neq \vec{0})$

$\Leftrightarrow (B\vec{x} = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

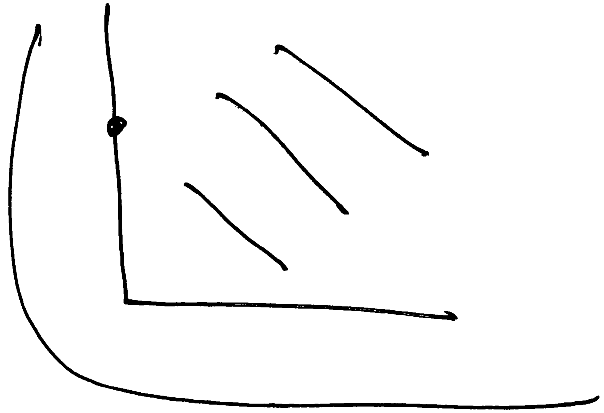
$\Leftrightarrow (x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n = \vec{0} \Rightarrow \vec{x} = \vec{0})$

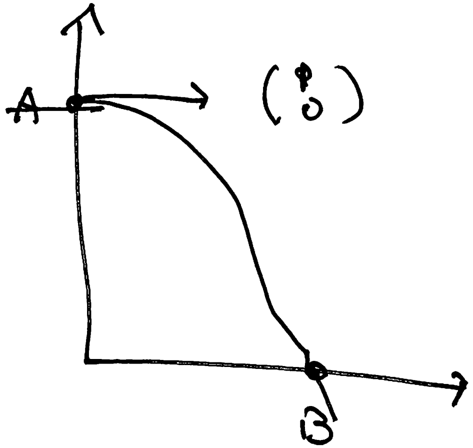
$\Longleftrightarrow$ ($\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n$ は1次独立)

$$U \supset \{(x,y);\ x,y \geq 0\}$$
閉

$g : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$





$$\boxed{x,\ y \geq 0,\ \ g=0 \ \text{の下で}\ z = f(x,y)}$$

Aで極値をとると何が導かれるか?

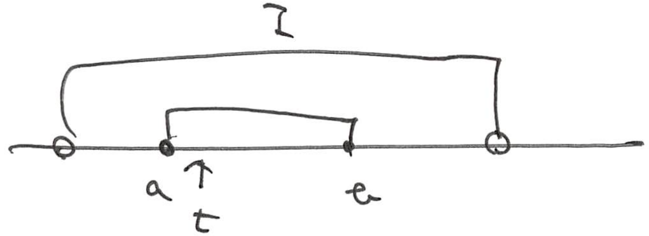
1) $g(A) = g(B) = 0$

仮定

2) $g_y(A) \neq 0$ かつ $g_x(B) \neq 0$. ← $g=0$ が Aでy軸と接していない

$$0 \neq \begin{vmatrix} 1 & g_x(A) \\ 0 & g_y(A) \end{vmatrix} = g_y(A)$$

準備



I 開区間 $\supset [a, b]$

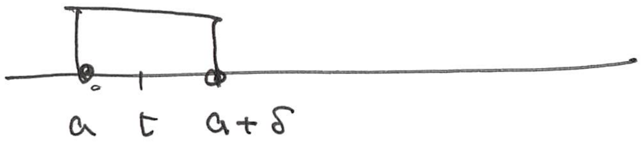
$f : I \longrightarrow \mathbb{R}$　C^1級.

$[a, b]$ において　$t = a$ で極大 (小)

$\Longrightarrow$　$f'(a) \leq 0$

$\geq$

$\exists \delta > 0$



極大.　ある $\delta > 0$ において

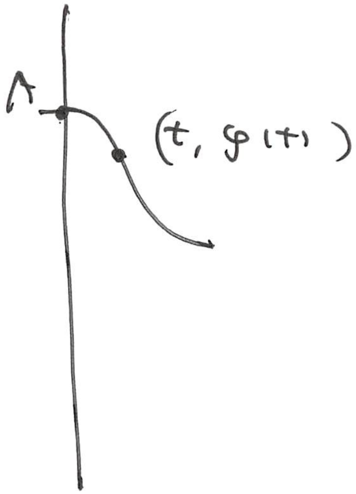
$f(a) \geq f(t) \quad (a \leq t < a + \delta)$

≤ 0

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \leq 0$$

$0 <$

$t \longrightarrow a$ とすると　$\Longrightarrow$　$f'(a) \leq 0$.



A で f の最大

$g_y(A) \neq 0$ より

A の近くで $g=0$ は

$y=\varphi(x)$ と書ける。

$F(t) = f(t, \varphi(t)) \rightsquigarrow F'(0) \leq 0$

$$= f_x(A)\cdot 1 + f_y(A)\cdot \varphi'(0) \leq 0$$

$\varphi'(0) = -\dfrac{g_x(A)}{g_y(A)}$ はよく導いた。

$$\longrightarrow \quad f_x(A) + f_y(A)\left(-\frac{g_x(A)}{g_y(A)}\right) \leq 0$$

$$\lambda = -\frac{f_y(A)}{g_y(A)}$$

$\nabla(x_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} f_x(A) + \lambda g_x(A) \leq 0 \\ f_y(A) + \lambda g_y(A) = 0 \end{cases}$$

$x \geq 0$

$\exists \mu_1 \geqq 0$ が存在して

$$f_x(A) + \lambda g_x(A) + \mu_1 \cdot 1 = 0$$

$$f_y(A) + \lambda g_y(A) + \mu_1 \cdot 0 = 0$$

$$\longrightarrow \quad \nabla(f) + \lambda \nabla(g) + \mu_1 \nabla(x(\cdot)) = 0$$

Lagrange 関数

$$\longrightarrow \quad \mathcal{L} = f + \lambda g + \mu_1 x + \mu_2 y.$$

(A) $\nabla(\mathcal{L}) = \vec{0}$, $g = 0$, $x = 0$

$\mu_1 \geqq 0$, $\mu_2 = 0$

(B) $\nabla(\mathcal{L}) = \vec{0}$, $g = 0$, $y = 0$

$\mu_1 = 0$, $\mu_2 \geqq 0$.

極大の必要条件.

$$f(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 4y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$2 > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0$$

$$= 2(x-a)^2 - 2(x-a)(y-b)$$

$$+ 2(y-b)^2 + c$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \quad 4x - 2y - 2 = 4(x-a) - 2(y-b)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \quad -2x + 4y + 4 = -2(x-a) + 4(y-b)$$

$$\rightarrow \begin{cases} 4a - 2b = 2 \\ -2a + 4b = -4 \end{cases}$$

$$a = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -4 & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}} = \frac{0}{12}, \quad b = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix}}{12} = \frac{-12}{12} = -1$$

$$X = x$$

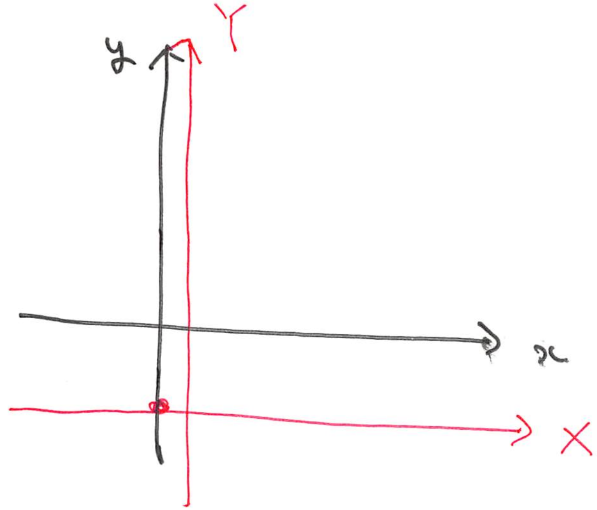
$$Y = y + 1$$

$$2x^2 - 2xy + 2y^2 - 2x + 4y$$

$$= X^2 - 2XY + 2Y + C$$

$x = 0 \rightarrow X = 0$

$y = 1 \rightarrow Y = 0$



$$6 = C$$

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 - 2x + 4y$$

工 平行すると式が 2" 簡単にする

$$= 5(x-a)^2 + 4(x-a)(y-b) + 2(y-b)^2 + C$$