emath 2015/12/15

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

1r += 3r

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -2 & 2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & \lambda-2 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & 2 & \lambda-4 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-2)\begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 2 & \lambda-3 \end{vmatrix} = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

対角化できることがわかる.

固有ベクトルを求める.

$\underline{\lambda=1}$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (z \neq 0)$$ が固有ベクトル

$\underline{\lambda=2}$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(z \neq 0)$ が固有ベクトル

$\underline{\lambda = 3}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ 0 \\ z \end{pmatrix} = z \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(z \neq 0)$ が固有ベクトル

$V(\alpha) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 ; \underbrace{A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} \right\} = \mathrm{Ker}(\alpha I_3 - A)$

$A : 3 \times 3$

$\Updownarrow$

$(\alpha I_3 - A) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\mathbb{R}^3$ の部分空間である。

固有値 α の固有空間。

$V(1) = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \vec{p}_1}$, $V(2) = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \vec{p}_2}$, $V(3) = \mathbb{R} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{= \vec{p}_3}$

$V_1, V_2, V_3 \subset \mathbb{R}^n$ 部分空間。

V_j : 部分空間 とは $\vec{v}_j, \vec{w}_j \in V_j \Longrightarrow \lambda \vec{v}_j + \mu \vec{w}_j \in V_j$.

$V_1 + V_2 + V_3 = \{ \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 ; \vec{v}_1 \in V_1, \vec{v}_2 \in V_2, \vec{v}_3 \in V_3 \}$

$\vec{a}, \vec{b} \in V_1 + V_2 + V_3.$

$\vec{a} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$

$\vec{b} = \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \qquad \vec{v}_j \in V_j,\ \vec{w}_j \in V_j \quad (j=1,2,3)$

$$\lambda \vec{a} + \mu \vec{b} = \lambda(\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3) + \mu(\vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3)$$

$$= \underset{\substack{\cap \\ V_1}}{(\lambda \vec{v}_1 + \mu \vec{w}_1)} + \underset{\substack{\cap \\ V_2}}{(\lambda \vec{v}_2 + \mu \vec{w}_2)} + \underset{\substack{\cap \\ V_3}}{(\lambda \vec{v}_3 + \mu \vec{w}_3)}$$

$\in V_1 + V_2 + V_3.$

$V(1) + V(2) + V(3).$

$\vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 = \vec{0} \Longrightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_2 = \vec{v}_3 = \vec{0}$

$\rightsquigarrow$ $V(1) + V(2) + V(3)$ は直和.

$V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$ 直和として明示.

$\vec{a} \in V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$ があるとき

$\vec{a} = c_1 \vec{p}_1 + c_2 \vec{p}_2 + c_3 \vec{p}_3$ と書ける

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は1次独立

$\vec{p}_1, \vec{p}_2, \vec{p}_3$ は $V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$ の基底.

$A: n\times n$ $\quad \alpha_i \neq \alpha_j \ (i\neq j)$

$A\vec{x}_j = \alpha_j \vec{x}_j, \quad \vec{x}_j \neq \vec{0}$

$\Longrightarrow$ $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_l$ は 1次独立.

$\longrightarrow$ $V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$ は 3次元

$\mathbb{R}^3 \supset V(1) \oplus V(2) \oplus V(3)$.

3次元 $=$ 3次元.

$\mathbb{R}^n \supset V \supset W$ 部分空間 $\quad \dim V = \dim W \Rightarrow V = W$

対偶 $V \supsetneq W \Longrightarrow \dim V > \dim W$.

W の基底 $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l$ とする.

$\exists \vec{v}_{l+1} \in V, \notin W$. とすると $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_l, \vec{v}_{l+1}$ は 1次独立.

$c_1\vec{v}_1 + \dots + c_l\vec{v}_l + c_{l+1}\vec{v}_{l+1} = \vec{0}$ とする.

$c_{l+1} \neq 0$ とする。 $\vec{v}_{l+1} = -\dfrac{1}{c_{l+1}} (c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_l \vec{v}_l) \in W$

$\notin W$ に矛盾.

$\longrightarrow c_{l+1} = 0 \rightsquigarrow c_1 \vec{v}_1 + \cdots + c_l \vec{v}_l = \vec{0}$

$\rightsquigarrow c_1 = \cdots = c_l = 0$

↑

Wの基底

$\rightsquigarrow \dim V \geq l+1.$

まとめ

$\mathbb{R}^3 = V(1) \oplus V(2) \oplus V(3).$ Aによる $\mathbb{R}^3$ のスペクトル分解.

⇓

$$\left.\begin{aligned} \vec{x} &= \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \\ &= \vec{w}_1 + \vec{w}_2 + \vec{w}_3 \end{aligned}\right)$$

と書ける。

2通り書けるとする

$$\underset{V(1)}{\underset{\cap}{(\vec{v}_1 - \vec{w}_1)}} + \underset{V(2)}{\underset{\cap}{(\vec{v}_2 - \vec{w}_2)}} + \underset{V(3)}{\underset{\cap}{(\vec{v}_3 - \vec{w}_3)}} = \vec{0}$$

$\xrightarrow[\text{直和}]{} \vec{v}_1 = \vec{w}_1,\ \vec{v}_2 = \vec{w}_2,\ \vec{v}_3 = \vec{w}_3.$

準備　$A: n \times n$.　$f(\lambda) = a_n \lambda^n + \cdots + a_1 \lambda + a_0$

$\in \mathbb{R}[\lambda]$

多項式全体

$$f(A) = a_n A^n + \cdots + a_1 A + a_0 I_n.$$

$$\boxed{A\vec{x} = \alpha \vec{x} \Rightarrow f(A)\vec{x} = f(\alpha)\vec{x}}$$

$$\left.\begin{aligned} A^2 \vec{x} &= A \alpha \vec{x} = \alpha A \vec{x} = \alpha^2 \vec{x} \\ A^3 \vec{x} &= A \alpha^2 \vec{x} = \alpha^2 A \vec{x} = \alpha^3 \vec{x} \end{aligned}\right) \quad A^k \vec{x} = \alpha^k \vec{x}$$

$$\begin{aligned} f(A)\vec{x} &= a_n A^n \vec{x} + \cdots + a_1 A \vec{x} + a_0 I_n \vec{x} \\ &= a_n \alpha^n \vec{x} + a_{n-1} \alpha^{n-1} \vec{x} + \cdots + a_1 \alpha \vec{x} + a_0 \vec{x} \\ &= (a_n \alpha^n + \cdots + a_1 \alpha + a_0) \vec{x} \\ &= f(\alpha) \vec{x} \end{aligned}$$

$$\mathbb{R}^3 = V(1) + V(2) + V(3)$$

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$f(1)=1,\quad f(2)=0,\quad f(3)=0.$$

$$f(\lambda)=\frac{(\lambda-2)(\lambda-3)}{(1-2)(1-3)}=-\frac{1}{2}(\lambda-2)(\lambda-3)$$

$$f(A)\vec{x}=\underbrace{f(1)}_{=1}\vec{v}_1+\underbrace{f(2)}_{=0}\vec{v}_2+\underbrace{f(3)}_{=0}\vec{v}_3=\vec{v}_1$$

$$\longrightarrow\quad \vec{v}_1=-\frac{1}{2}(A-2I)(A-3I).\vec{x}.$$

$$g(1)=0,\ g(2)=1,\ g(3)=0\quad\longrightarrow\quad g(\lambda)=\frac{(\lambda-1)(\lambda-3)}{(2-1)(2-3)}=-(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\vec{v}_2=-(A-I)(A-3I)\vec{x}$$

$$h(1)=h(2)=0,\ h(3)=1\qquad h(\lambda)=\frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(3-1)(3-2)}=\frac{1}{2}(\lambda-1)(\lambda-3)$$

$$\vec{v}_3=\frac{1}{2}(A-I)(A-3I)\vec{x}.$$

$A : n \times n$ $\qquad \Phi_A(\lambda) = \prod_{j=1}^{\ell} (\lambda - \alpha_j)^{m_j}$

$\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$

$m_j \geqq 1$

$\mathbb{R}^n = V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_\ell)$ となるとき A によってスペクトル分解可能

$\Updownarrow$

A は対角化可能.

$V(\alpha_1)$ への射影

$\downarrow$

$f(A)$

$$f(\lambda) = \frac{(\lambda-\alpha_2)\cdots(\lambda-\alpha_\ell)}{(\alpha_1-\alpha_2)\cdots(\alpha_1-\alpha_\ell)}$$

$f(\alpha_1) = 1, \ f(\alpha_2) = \cdots = f(\alpha_\ell) = 0$

$$P_1 = -\frac{1}{2}(A-2I)(A-3I)$$

$$P_2 = -(A-I)(A-3I)$$

$$P_3 = \frac{1}{2}(A-I)(A-3I)$$

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3 \qquad \vec{v}_j \in V(j)$$

$$\vec{x} = P_1\vec{x} + P_2\vec{x} + P_3\vec{x} = (P_1 + P_2 + P_3)\vec{x}$$

$$\longrightarrow \quad P_1 + P_2 + P_3 = I_3$$

$$P_1^2 = P_1, \quad P_2^2 = P_2, \quad P_3^2 = P_3.$$

$$P_1P_2 = O, \quad P_2P_3 = O, \quad P_1P_3 = O$$

$\vec{v}_1 \in V(1)$

$$\vec{v}_1 = \vec{v}_1 + \underline{\underline{\vec{0}}} + \vec{0} \quad \rightsquigarrow \quad P_1\vec{v}_1 = \vec{v}_1, \quad P_2\vec{v}_1 = \underline{\underline{\vec{0}}}$$

$$P_1 \qquad P_1\vec{x} = \vec{v}_1 \quad \overset{P_1 \cdot}{\rightsquigarrow} \quad P_1^2\vec{x} = P_1\vec{v}_1 = \vec{v}_1 = P_1\vec{x}$$

$$P_2 \qquad P_2P_1\vec{x} = \vec{0}$$

$$\boxed{\begin{aligned} P_iP_j &= O \quad i \neq j \\ P_i^2 &= P_i \end{aligned}}$$

$$\vec{x} = \vec{v}_1 + \vec{v}_2 + \vec{v}_3$$

$$\begin{aligned} A\vec{x} &= 1\cdot\vec{v}_1 + 2\vec{v}_2 + 3\cdot\vec{v}_3 \\ &= 1\cdot P_1\vec{x} + 2P_2\vec{x} + 3P_3\vec{x} \\ &= (1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3)\,\vec{x} \end{aligned}$$

$A = 1\cdot P_1 + 2\cdot P_2 + 3\cdot P_3$ と書ける

$A^n = 1^n P_1 + 2^n P_2 + 3^n P_3$

$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -17 \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & -3 & -6 \end{pmatrix}$ に対して $\Phi_A(\lambda)$ を求める.

1つの固有値 α に対して $V(\alpha)$ への射影行列を A で書け.