emath 2015/11/17

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$(\lambda - 2)\,(1\ \ 1\ \ 0)$

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & 1 & 2 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} \overset{1r += 2r}{=} \begin{vmatrix} \lambda-2 & \lambda-2 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & \lambda-3 & -2 \\ 2 & -2 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda-4 & -2 \\ 0 & -4 & \lambda-6 \end{vmatrix} = (\lambda-2) \begin{vmatrix} \lambda-4 & -2 \\ -4 & \lambda-6 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda-2)\left((\lambda-4)(\lambda-6) - 8\right)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda^2 - 10\lambda + 16)$$

$$= (\lambda-2)(\lambda-2)(\lambda-8) = (\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

$A : 3 \times 3$ $\quad \Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)(\lambda - \alpha_2)(\lambda - \alpha_3)$

$\alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$

$\Longrightarrow$ A は 対角化 可能.

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad \Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$$

対角化できない.

固有ベクトルを求める.

$\lambda = 8$

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 8\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\hookrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff \begin{cases} x + \frac{1}{2}z = 0 \\ y - \frac{1}{2}z = 0 \end{cases}$$

より固有ベクトルは $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}z \\ \frac{1}{2}z \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{2}z\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$(z \neq 0)$

$\lambda = 2$ のとき.

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & -4 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\hookrightarrow \cdots \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\iff x - y - 2z = 0.$$

$V(2) = \mathrm{Ker}(A - 2I)$

固有値2の固有空間

という

$\dim V(2) = 2$

$V(2)$の基底を求める.

$$V(2) \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + 2z \\ y \\ z \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \iff \left(c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0 \right)$$

定義

$$\begin{pmatrix} * \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \rightsquigarrow c_1 = c_2 = 0$$

1) $V(2)$ は $\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ で生成される.

(generated by $\vec{q}_1$ and $\vec{q}_2$)

2) $\vec{q}_1 \nparallel \vec{q}_2$, $\vec{q}_1$ と $\vec{q}_2$ は1次独立.

$\longrightarrow$ $\vec{q}_1, \vec{q}_2$ は $V(2)$ の基底.

$\vec{q}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ とすると

$$A(\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3) = (2\vec{q}_1\ \ 2\vec{q}_2\ \ 8\vec{q}_3)$$
$$= (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

この状況で $Q = (\vec{q}_1\ \vec{q}_2\ \vec{q}_3)$ は <u>正則</u> になる. (後述)

→ 次回.

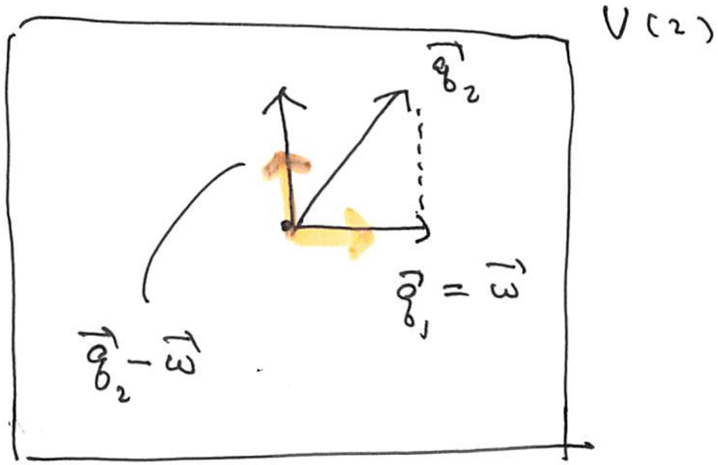
$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

$V(2)$ の正規直交基底を求める.

$\vec{q}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{q}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{w}$: $\vec{q}_2$ の $\vec{q}_1$ 方向への直交射影

$$\vec{w} = \frac{(\vec{q}_1, \vec{q}_2)}{\|\vec{q}_1\|^2}\vec{q}_1 = \frac{2}{2}\vec{q}_1 = \vec{q}_1$$

$$\vec{q}_2 - \vec{q}_1 = \begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$



$$\vec{p}_1 = \frac{1}{\|\vec{q}_1\|}\vec{q}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{p}_2 = \frac{1}{\|\vec{q}_2 - \vec{w}\|}(\vec{q}_2 - \vec{w}) = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$\vec{q}_3 = \begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} \longrightarrow \vec{p}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$$

$P = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)$ は直交

$\Updownarrow$

$$\|\vec{p}_1\| = \|\vec{p}_2\| = \|\vec{p}_3\| = 1$$

$$(\vec{p}_1, \vec{p}_2) = 0 \qquad (\vec{p}_1, \vec{p}_3) = (\vec{p}_2, \vec{p}_3) = 0$$

<u>定理</u> A: $n \times n$. 対称.. $\alpha \neq \beta$.

$$A\vec{v}_1 = \alpha\vec{v}_1,\ A\vec{v}_2 = \beta\vec{v}_2 \Longrightarrow (\vec{v}_1, \vec{v}_2) = 0$$

$$\vec{v}_1 \in V(\alpha),\ \vec{v}_2 \in V(\beta) \qquad V(\alpha) \perp V(\beta)$$

$$AP = (A\vec{p}_1\ A\vec{p}_2\ A\vec{p}_3) = (2\vec{p}_1\ 2\vec{p}_2\ 8\vec{p}_3) = (\vec{p}_1\ \vec{p}_2\ \vec{p}_3)\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix}2\\0\\0\end{matrix}} & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

$\vec{p}_1, \vec{p}_2 \in V(2)$ に注意.

$$AP = P\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix} \longrightarrow P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}$$

正則で

P は直交 なので $P^{-1} = {}^tP$.

$(\Leftrightarrow {}^tPP = P{}^tP = I_3)$

$\Leftrightarrow (P\vec{v}, P\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$ $(\vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3)$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\left(A\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}\right) = 3x^2 + 3y^2 + 6z^2 - 2xy - 4xz + 4yz.$$

$\|$ ${}^tP(=P^{-1})$ は直交

P : 直交 $\Rightarrow {}^tP$ も直交

$$\left(P^{-1}A\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}, P^{-1}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}\right)$$

$P \cdot P^{-1}$

${}^tPP = P{}^tP = I_3.$

$${}^tP\,{}^t({}^tP) = {}^t({}^tP)\,{}^tP = I_3.$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 2 & \\ & & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi\\ \eta\\ \zeta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi\\ \eta\\ \zeta \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} \xi\\ \eta\\ \zeta \end{pmatrix} = P^{-1}\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \xi\\ \eta\\ \zeta \end{pmatrix}$$

$$= 2\xi^2 + 2\eta^2 + 8\zeta^2 \geqq 0.$$

$$\Leftrightarrow 2\xi^2 = 2\eta^2 = 8\zeta^2 = 0 \Leftrightarrow \xi = \eta = \zeta = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x\\y\\z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$P_1, P_2, P_3 \geqq 0$ のとき.
$P_1 + P_2 + P_3 = 0 \iff P_1 = P_2 = P_3 = 0$

(IV) A: 3×3. 対称.

$(A\vec{v}, \vec{v}) > 0 \quad (\vec{v} \neq \vec{0})$

A が定める2次形式は
正定値 (positively definite)

$\iff$ A の固有値は正 α, β, γ $\quad \alpha, \beta, \gamma > 0$

$\iff$ $A_1 > 0, \ |A_2| > 0, \ |A_3| > 0.$ 主座小行列式.

証明していない

$A_1 = a_{11}$

$A_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A_3 = A$

A : $n \times n$ 実対称.

Ⅰ $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1) \cdots (\lambda - \alpha_n)$

$\Longrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ （証明しない）

Ⅱ $\exists P$: 直交 $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{pmatrix}$ と対角化.

$n=3$ のときを示す. → 次回説明 参考 30, 31 p.
IT手

Ⅲ このとき $\vec{\xi} = P^{-1}\vec{x}$ とすると

$$(A\vec{x}, \vec{x}) = \alpha_1 \xi_1^2 + \cdots + \alpha_n \xi_n^2$$

$$\parallel$$

$$(P^{-1}AP \cdot P^{-1}\vec{x}, P^{-1}\vec{x}) = \left(\begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \vec{\xi}, \vec{\xi} \right) = \cdots$$

$P^{-1} = {}^tP$ は直交

Ⅳ $(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \ (\vec{x} \neq \vec{0}) \Longleftrightarrow \alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0$

$\Longleftrightarrow |A_i| > 0 \quad (i = 1, \cdots, n)$

$\Longrightarrow$ を示した. $\Longleftarrow$?

補題　A : $n\times n$ 行列.

$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$ と仮定.

$\Longrightarrow$ $|A| > 0$.

$$ {}^tPAP = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} $$

$$ |{}^tPAP| = \begin{vmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n > 0 $$

$$ \begin{array}{c} \shortparallel \\ \underbrace{|{}^tP|\cdot|A|\cdot|P|}_{\shortparallel \atop 1} = |A| \end{array} $$

${}^tPP = I_n$

$\downarrow$

$|{}^tP|\cdot|P| = |I_n| = 1$

命題　$A : n \times n$ 対称.

$$(A\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0}) \quad \left(\Longleftrightarrow \underset{\text{固有値}}{\alpha_1, \cdots, \alpha_n > 0} \right)$$

$$\Longrightarrow \quad |A_1|, |A_2|, \cdots, |A_n| > 0.$$

$n = 3$ のとき示す. $|A_1| > 0$, $|A_2| > 0$ です.

$$0 < \left(\begin{pmatrix} a & p & q \\ p & e & r \\ q & r & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \right) = a x^2 + e y^2 + 2pxy$$

$$= \left(\begin{pmatrix} a & p \\ p & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}}$$

$\rightsquigarrow$

$$\left(\begin{pmatrix} a & p \\ p & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) > 0 \quad \left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0} \right)$$

$$\Updownarrow$$

$$a > 0, \quad \begin{vmatrix} a & p \\ p & e \end{vmatrix} > 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

各固有値の

$\Phi_A(\lambda)$ を求める. 固有