emath 2015/11/03

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x+y+z = 0 \\ g_2(x,y,z) = x+2y+3z-1 = 0 \end{cases}$$

の下で

$$w = f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

$g_1 = 0$ かつ $g_2 = 0$ 直線

$\cap$

方向ベクトル $\vec{v}$

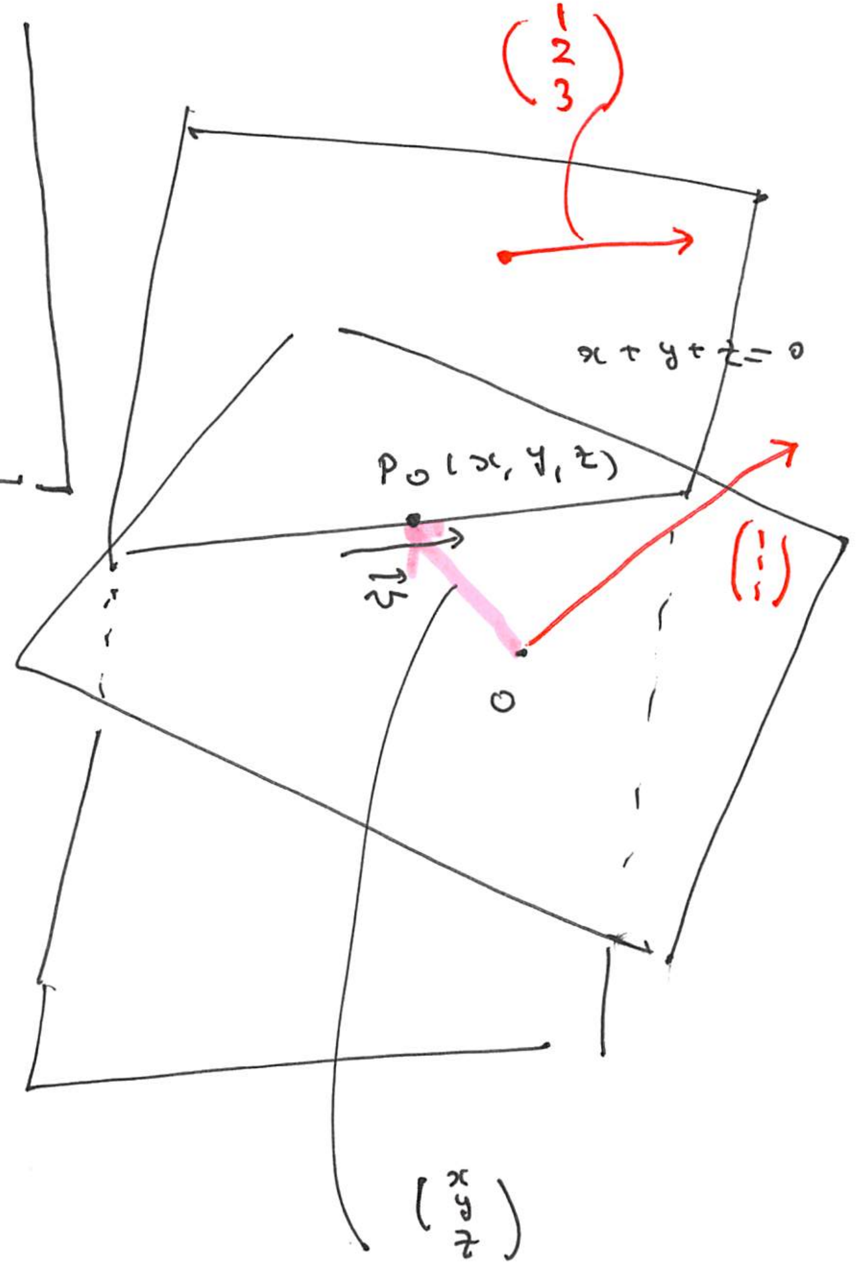
$$\left(\vec{v}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right) = 0, \quad \left(\vec{v}, \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = 0$$

P_0 で最小

$\Rightarrow \overrightarrow{OP_0} \perp \vec{v} \longleftrightarrow$ 未定乗数法では $\nabla(f) \perp \vec{v}$ at P_0

$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$　　$\vec{v}$：1次元.

$\vec{v}$ に垂直なのは 2次元.



$$(\mathbb{R}\vec{v})^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \ni \overrightarrow{OP_0}$$

$$\nabla(f) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}, \quad \nabla(g_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \nabla(g_2) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

より

$$\begin{cases} \nabla(f) + \lambda_1 \nabla(g_1) + \lambda_2 \nabla(g_2) = 0 \text{ を満たす } \lambda_1, \lambda_2 \text{ が存在.} \\ g_1 = g_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \boxed{2\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}} \\ x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2}\lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \text{ で } \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ より}$$

$$\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$= \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-x & 0 & 1 \\ z-x & 0 & 2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} y-x & 1 \\ z-x & 2 \end{vmatrix}$$

より

$$= -2(y-x) + (z-x)$$

$$= x - 2y + z = 0.$$

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{array}\right) \to \cdot \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

より $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$

λ_1, λ_2 は存在.

ポートフォリオ理論.

資産 $A_1, A_2, \cdots, A_n$

1期	$R_{1,1}$	$R_{2,1}$
2期	$R_{1,2}$	$R_{2,2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
N期	$R_{1,N}$	$R_{2,N}$

収益率 $R_1 \quad R_2 \cdots R_n$

投資比 $x_1 \quad x_2 \cdots x_n$

ポートフォリオ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n - 1 = 0$

$R = x_1 R_1 + \cdots + x_n R_n$ ポートフォリオの収益率.

$\mu_j = \overline{R_j} \quad (j = 1, \cdots, n)$

$$\mu = \overline{R} = x_1 \mu_1 + \cdots + x_n \mu_n$$

$$
(6.5)\quad
\left[
\begin{array}{l}
\left.
\begin{array}{l}
g_1 = 1 - x_1 - \cdots - x_n = 0 \\
g_2 = -(x_1\mu_1 + \cdots + x_n\mu_n) + \mu = 0
\end{array}
\right\} \text{の下で}
\\[2ex]
f = \dfrac{1}{2} V(R) = \dfrac{1}{2}(V\vec{x}, \vec{x}) \ \text{を最小化}
\end{array}
\right.
$$

$(\vec{1}, \vec{x}) = 1$

$(\vec{\mu}, \vec{x}) = \mu.$

← リスク最小化.

$$
\sigma_{ij} = \begin{cases} V(R_j) & (i = j) \\ \mathrm{Cov}(R_i, R_j) & (i \neq j) \end{cases}
$$

注) Vは対称.

$V = (\sigma_{ij})$ 分散行列. $= {}^tDD.$

$D = (\vec{R}_1\ \vec{R}_2 \cdots \vec{R}_n)$

$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

$$
R_j = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} R_{j,1} - \bar{R}_j \\ \vdots \\ R_{j,N} - \bar{R}_j \end{pmatrix}
$$

仮定 ① $\vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \not\parallel \vec{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

$(c_1\vec{\mu} + c_2\vec{1} = \vec{0} \Rightarrow c_1 = c_2 = 0)$

② $(V\vec{x}, \vec{x}) > 0 \quad (\vec{x} \neq \vec{0})$

Vの定める2次形式は正定値.

A: n次対称行列　$f(\vec{x}) = \frac{1}{2}(A\vec{x}, \vec{x})$ とする

$\nabla(f) = A\vec{x}$.

$$\nabla(f) + \lambda_1 \nabla(g_1) + \lambda_2 \nabla(g_2) = \vec{0}$$

を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ が存在

$$V\vec{x} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} -\mu_1 \\ -\mu_2 \\ \vdots \\ -\mu_n \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$V\vec{x} = \lambda_1 \vec{1} + \lambda_2 \vec{\mu}$ を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ が存在

② ⟹ Vは正則 ($\det V > 0$)

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$

$\iff a > 0$ かつ $|A| > 0$

$$\vec{x} = V^{-1}(\lambda_1 \vec{1} + \lambda_2 \vec{\mu})$$

$$= \lambda_1 V^{-1}\vec{1} + \lambda_2 V^{-1}\vec{\mu} \qquad (6.10)$$

$$= (V^{-1}\vec{1} \quad V^{-1}\vec{\mu})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = V^{-1}(\vec{1} \quad \vec{\mu})\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

A : n次対称行列であり，正則

$${}^tA = A$$

$\Longrightarrow$ A^{-1} : 対称行列

$${}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA$$

$$A \cdot A^{-1} = I_n \qquad {}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA = {}^tI_n = I_n$$

$$\begin{aligned} {}^t(A^{-1}) \cdot {}^tA &= {}^tI_n \\ \| \quad & \\ {}^t(A^{-1}) \cdot A & \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad {}^t(A^{-1})\,A = I_n \longrightarrow {}^t(A^{-1}) = A^{-1}$$

右から A^{-1}

$\cdot\,(A^{-1})$

$$\boxed{(\vec{a}, \vec{b}) = {}^t\vec{a}\,\vec{b}}$$

$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{\mu} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{\mu} \end{pmatrix} (V^{-1}\vec{1}\ \ V^{-1}\vec{\mu}) \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{\mu} \end{pmatrix} V^{-1} (\vec{1}\ \ \vec{\mu})} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

正則となる

①, ②から導ける.

$\lambda_1 = \cdots$

$\lambda_2 = \cdots$

$$\begin{pmatrix} {}^t\vec{1} \\ {}^t\vec{\mu} \end{pmatrix} \vec{x} = \begin{pmatrix} (\vec{1}, \vec{x}) \\ (\vec{\mu}, \vec{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{1}\,V^{-1}\vec{\mu} \\ {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{1} & {}^t\vec{\mu}\,V^{-1}\vec{\mu} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (\vec{1}, V^{-1}\vec{1}) & (\vec{1}, V^{-1}\vec{\mu}) \\ (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{1}) & (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{\mu}) \end{pmatrix}$$

V^{-1}: 対称.

V^{-1} は対称. $(2, 1)$成分 $= (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{1})$

$= ({}^t(V^{-1})\,\vec{\mu}, \vec{1}) = (V^{-1}\vec{\mu}, \vec{1}) = (1, 2)$成分

215 p. $\quad A = (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{1}) = (\vec{1}, V^{-1}\vec{\mu})$

$$B = (\vec{\mu}, V^{-1}\vec{\mu})$$

$$C = (\vec{1}, V^{-1}\vec{1})$$

$$\begin{pmatrix} C & A \\ A & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \mu \end{pmatrix}$$

$CB - A^2 > 0$ を用いて解くのは普通.

② $\rightsquigarrow$ V^{-1} も正定値になる.

I

$A = \begin{pmatrix} a & d & e \\ d & b & f \\ e & f & c \end{pmatrix}$ に対して $f(x, y, z) = \frac{1}{2}\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$ とする.

$\nabla(f) = ?$

II

$A : n \times n$ 対称行列
$B : n \times 2$
${}^{t}B : 2 \times n$

$C = {}^{t}BAB$ が定まる

C が対称行列であることを示せ.