10月27日

emath.2015

$$\begin{cases} g_1(x,y,z) = x+y+z=0 & \cdots ① \\ g_2(x,y,z) = x+2y+3z-1=0 & \cdots ② \end{cases}$$

の下で

$$w = f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$$

を考える.

Lagrangeの未定乗数により

$$\nabla(f) + \lambda_1 \nabla(g_1) + \lambda_2 \nabla(g_2) = \vec{0}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

を満たす $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ が存在する. これを

$$\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \cdots (\#)$$

と見ると $\begin{pmatrix} 2 \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ より

$$0 = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 1 & 2 \\ z & 1 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y-x & 0 & 1 \\ z-x & 0 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} y-x & 1 \\ z-x & 2 \end{vmatrix}$$

$$= x - 2y + z \quad \cdots ③$$

が必要となる. ① かつ ② かつ ③ は

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \to \cdots \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

より $x = -\frac{1}{2}$, $y = 0$, $z = \frac{1}{2}$ となる. このとき, (#)より

$$\begin{cases} -1 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 0 + \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{cases}$$

を満たすが $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = -1$ となる これは(#)の第3成分を満たす. 実際

$$1 + 2 + 3(-1) = 0$$

となる.