計量経済学を念頭に + 消費者理論.

ポートフォリオ理論.

資産	A_1,	A_2,	$\cdots$,	A_n
1期	$R_{1,1}$	$R_{2,1}$		
2期	$R_{1,2}$	$R_{2,2}$		
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		
N期.	$R_{1,N}$	$R_{2,N}$		
収益率 (変量)	R_1	R_2	$\cdots$	R_n

収益率. r

期首　　期末

$$1 \longmapsto 1+r$$

(N.B. $x_i \geq 0$、空売りを許さない)

$x_i < 0$ でもいいとする.

投資金額 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ $\longrightarrow$ $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$ とする.

porto-folio.

portare
folio

$R = x_1 R_1 + \cdots + x_n R_n$ ポートフォリオの収益率.

$$E[R] = x_1 E[R_1] + \cdots + x_n E[R_n]$$

$$\begin{array}{rll}
A_1 & x_1 \longmapsto & x_1(1+R_1) \\
A_2 & x_2 \longmapsto & x_2(1+R_2) \\
 & \vdots & \\
+) \; A_n & x_n \longmapsto & x_n(1+R_n) \\
\hline
 & 1 \longmapsto & 1 + x_1 R_1 + \cdots + x_n R_n
\end{array}$$

$\longrightarrow$ 大きい方がいい。

$V[R]$ リスク $\longrightarrow$ 小さい方がいい。

(6.3) $\mu_i = E[R_i]$

(6.4) $\sigma_{ij} = \mathrm{Cov}(R_i, R_j)$. R_i と R_j の共分散.

$$\left.\begin{aligned} \mu &= x_1\mu_1 + \cdots + x_n \mu_n \\ 1 &= x_1 + \cdots + x_n \end{aligned}\right\}$$ の下に $V[R]$ を最小化する.

ベクトルとデータ解析
行列

分散・共分散とベクトルの内積、
相関係数。

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_N	y_N

$$\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} x_1 - \bar{x} \\ x_2 - \bar{x} \\ \vdots \\ x_N - \bar{x} \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = \frac{1}{\sqrt{N}} \begin{pmatrix} y_1 - \bar{y} \\ \vdots \\ y_N - \bar{y} \end{pmatrix}$$

とおく。

$$\|\vec{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{N} \left\{ \frac{1}{\sqrt{N}} (x_i - \bar{x}) \right\}^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})^2 = V(x)$$

x の分散。

$$(\vec{x}, \vec{y}) = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sqrt{N}} (x_i - \bar{x}) \cdot \frac{1}{\sqrt{N}} (y_i - \bar{y})$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

x と y の共分散。

$$= \mathrm{Cov}(x, y)$$

$z = ax + by$ 新たな変量.

a, b：定数　$z_i = ax_i + by_i$　i に依らない.

$\bar{z} = a\bar{x} + b\bar{y}$

$$z_i - \bar{z} = ax_i + by_i - (a\bar{x} + b\bar{y})$$
$$= a(x_i - \bar{x}) + b(y_i - \bar{y})$$

$$\longrightarrow \frac{1}{\sqrt{N}}(z_i - \bar{z}) = a\frac{1}{\sqrt{N}}(x_i - \bar{x}) + b\frac{1}{\sqrt{N}}(y_i - \bar{y})$$

$$\longrightarrow \boxed{\vec{z} = a\vec{x} + b\vec{y}\,.}$$

$$V(z) = \|\vec{z}\|^2 = \|a\vec{x} + b\vec{y}\|^2$$

$(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$

$= \cdots\cdots$ ← 宿題

$$\boxed{\begin{aligned}&\|\vec{x} \pm \vec{y}\|^2 \\ &= \|\vec{x}\|^2 \pm 2(\vec{x}, \vec{y}) + \|\vec{y}\|^2\end{aligned}}$$

$$
\begin{aligned}
V(z) &= \| a\vec{x} + b\vec{y} \|^2 \\
&= \| a\vec{x} \|^2 + 2(a\vec{x}, b\vec{y}) + \| b\vec{y} \|^2 \\
&= a^2 \| \vec{x} \|^2 + 2ab(\vec{x}, \vec{y}) \\
&\qquad + b^2 \| \vec{y} \|^2 \\
&= a^2 V(x) + 2ab\,\mathrm{Cov}(x, y) \\
&\qquad + b^2 V(y)
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\| \lambda \vec{x} \| = |\lambda| \cdot \| \vec{x} \|}$$

まとめ.

$z = ax + by$ とする.

$$
\begin{aligned}
V(z) = a^2 V(x) &+ 2ab\,\mathrm{Cov}(x, y) \\
&+ b^2 V(y)
\end{aligned}
$$

相関係数.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_N	y_N

相関係数

$$\rho_{xy} = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{\sqrt{V(x)}\sqrt{V(y)}} = \frac{(\vec{x}, \vec{y})}{\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|}.$$

コーシー・シュヴァルツの不等式

$$|(\vec{x}, \vec{y})| \leq \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$$

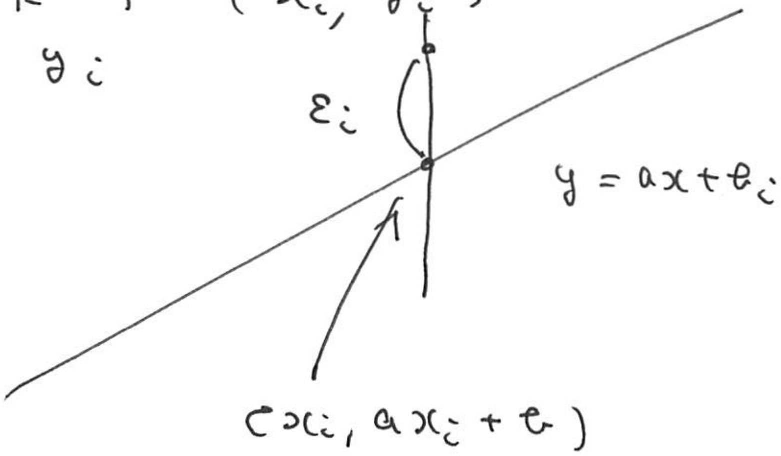
$$\longrightarrow \quad -1 \leq \rho_{xy} \leq 1$$

回帰直線. $y = ax + b$.

x: 説明変数
y: 目的変数) として考える

理論値　実測 (x_i, y_i)

$x_i \longmapsto ax_i + b$.　y_i



$$\varepsilon_i = y_i - (ax_i + b)$$

① $\bar{\varepsilon} = 0$

② $V(\varepsilon)$ 最小.

$$\varepsilon = y - (ax + b) \qquad \bar{\varepsilon} = \bar{y} - a\bar{x} - b = 0$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= y - ax - (\bar{y} - a\bar{x}) \\ &= y - \bar{y} - a(x - \bar{x}).\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{N}}\varepsilon_i = \frac{1}{\sqrt{N}}(y_i - \bar{y}) - a\frac{1}{\sqrt{N}}(x_i - \bar{x})}$$

$\uparrow$
$\bar{\varepsilon} = 0$

$$\begin{aligned}V(\varepsilon) &= V(y - \bar{y}) - 2a\,\mathrm{Cov}(y - \bar{y}, x - \bar{x}) + a^2 V(x - \bar{x}) \\ &= V(y) - 2a\,\mathrm{Cov}(y, x) + a^2 V(x)\end{aligned}$$

$$\vec{\varepsilon} = \vec{y} - a\vec{x}$$

$$V(\varepsilon) = \|\vec{\varepsilon}\|^2 = \|\vec{y} - a\vec{x}\|^2$$

$$= \|\vec{y}\|^2 - 2(\vec{y}, a\vec{x}) + \|a\vec{x}\|^2$$

$$= \|\vec{y}\|^2 - 2a(\vec{y}, \vec{x}) + a^2\|\vec{x}\|^2$$

$$= V(y) - 2a\,\mathrm{Cov}(x, y) + a^2 V(x).$$

$$= V(x)\Big(\underbrace{a - \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{V(x)}}_{=0}\Big)^2 + V(y) - \frac{\mathrm{Cov}(x, y)^2}{V(x)}$$

回帰直線

$$a = \frac{\mathrm{Cov}(x, y)}{V(x)}, \quad b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$\rightsquigarrow$ $y = ax + b$ が定まる.

回帰直線の $V(\varepsilon)$ 残差平方和 $= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$

$\bar{\varepsilon} = 0$

$V(\varepsilon) = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(\varepsilon_i - \bar{\varepsilon})^2$

$V(\varepsilon)$

$$= V(y) - \frac{\mathrm{Cov}(x, y)^2}{V(x)} = V(y)\left(1 - \boxed{\frac{\mathrm{Cov}(x, y)^2}{V(x)\,V(y)}}\right)$$

$$= V(y)\,(1 - \rho_{xy}^2)$$

$V(y)$ 一定として $\rho_{xy} \to \pm 1$ のとき $V(z) \to 0$

$$= \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i^2$$

I　$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ において

$\| \vec{a} - t\vec{b} \|^2$ を最小にする t を求めよ.

II. $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$　$m \times 4$ ぎょうれつ

$$A \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \lambda \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = ?$$