CalcNT2015
12/16

I (1) $(x^3\sqrt{x})' = (x^{\frac{7}{2}})' = \frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}$ より

$$\left(\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}\right)' = x^2\sqrt{x}.$$

$$\int_0^1 x^2\sqrt{x}\,dx = \left[\frac{2}{7}x^3\sqrt{x}\right]_0^1 = \frac{2}{7}$$

(2) $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{x}}$ より $(2\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_1^2 = 2(\sqrt{2}-1)$$

(3) $(e^{-2t})' = -2e^{-2t}$ より $\left(-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)' = e^{-2t}$

$$\int_0^1 e^{-2t}\,dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^1 = -\frac{1}{2}(e^{-2}-1)$$

$$= \frac{e^2-1}{2e^2}$$

(4) $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ より $\left(-\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}$

$$\int_1^2 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^2 = -\frac{1}{2}+1 = \frac{1}{2}$$

(5) $(\cos 2t)' = -\sin 2t \cdot 2$ より $\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)' = \sin 2t$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2t\,dt = \left[-\frac{1}{2}\cos 2t\right] = -\frac{1}{2}((-1)-1) = 1$$

II

$$\begin{cases} \dfrac{1}{3}\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} - \lambda p = 0 \quad \cdots (1) \\ \dfrac{1}{3}\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} - \lambda q = 0 \quad \cdots (2) \end{cases}$$

$$I - px - qy = 0 \quad \cdots (3)$$

(1) より $\dfrac{y^{\frac{1}{3}}}{x^{\frac{2}{3}}} = 3\lambda p \quad \cdots (1)'$

(2) より $\dfrac{x^{\frac{1}{3}}}{y^{\frac{2}{3}}} = 3\lambda q \quad \cdots (2)'$

$(1)' \times ((2)')^2$ より $\dfrac{1}{y} = 27\lambda^3 p q^2$

$((1)')^2 \times (2)'$ より $\dfrac{1}{x} = 27\lambda^3 p^2 q$

よって $px = qy = \dfrac{1}{27\lambda^3 pq}$

(3) より $px = qy = \dfrac{I}{2}$ となるので $x = \dfrac{I}{2p}$, $y = \dfrac{I}{2q}$

このとき $\lambda^3 = \dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{1}{p^2 q}\cdot\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{1}{p^2 q}\cdot\dfrac{2p}{I}$

より $\lambda = \dfrac{1}{3}\sqrt[3]{\dfrac{2}{pqI}}$

注1 $px = qy$ に気が付かなかった場合は (3) に代入して

$$0 = I - \frac{1}{27\lambda^3 pq} - \frac{1}{27\lambda^3 pq}$$

$$= I - \frac{2}{27\lambda^3 pq}$$

より $\dfrac{1}{\lambda^3} = \dfrac{27pq}{2}$ を求めることになります。

注2　$\dfrac{①'}{②'}$ より　$\dfrac{y}{x} = \dfrac{p}{q}$ 従って $xp = yq$

と導くこともできます.

注3　$u(x, y) = \alpha \log x + \beta \log y$ のときの需要関数は

$$x(p, q, I) = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} \cdot \frac{I}{p}$$

$$y(p, q, I) = \frac{\beta}{\alpha+\beta} \cdot \frac{I}{q}$$

でした. $\alpha = \beta = \frac{1}{3}$ のとき.

$$x(p, q, I) = \frac{I}{2p}, \quad y(p, q, I) = \frac{I}{2q}$$

と この問題で求めた需要関数と一致します.