2015/11/11

$z = f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$ の停留点を求めて極大(小)を判定する.

11/18 なし
11/25 有.

$$\begin{cases} f_x = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y) = 0 \\ f_y = 4y^3 - 4x = 4(y^3 - x) = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x^3 = y \quad \cdots ① \\ y^3 = x \quad \cdots ② \end{cases}$$ が (x, y) が停留点となる条件.

①を②に代入 (yを消去)

$$x^9 = x. \quad \cdots (\#)$$

が必要となる.

$$x^8 - 1 = (x^4 - 1)(x^4 + 1) = (x^2 - 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1)$$

$$(\#) \Longleftrightarrow x = 0 \text{ or } x^8 = 1$$

$$\Longleftrightarrow x = 0 \text{ or } x = \pm 1$$

これを①に代入する. それぞれの場合

$$y = 0, \pm 1$$

停留点は $(x, y) = (0, 0), (\pm 1, \pm 1)$ (複号同順)

$f_x = 4x^3 - 4y, \quad f_y = 4y^3 - 4x.$

$f_{xx} = 12x^2$

$f_{xy} = f_{yx} = -4$

↑ Youngの定理.

$f_{yy} = 12y^2$

$= \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ Hesse行列

(0, 0) において

$|H(f)| = \begin{vmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 0 \end{vmatrix} = -16 < 0$

より (0, 0) では極大でも極小でもない

(±1, ±1) において

$|H(f)| = \begin{vmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 12 \end{vmatrix} = 4^2 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$ （$4\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$）

$= 4^2 \cdot 8 > 0$

$f_{xx} = 12 > 0$

より (±1, ±1) において極小.

まとめ

$$f_x(a,b) = f_y(a,b) = 0$$

(i) $$|H(f)(a,b)| = \begin{vmatrix} f_{xx}(a,b) & f_{xy}(a,b) \\ f_{yx}(a,b) & f_{yy}(a,b) \end{vmatrix} > 0$$

$<$

$$f_{xx}(a,b) > 0$$

大.

$\Longrightarrow$ fは (a,b) で極小.

(ii) $$|H(f)(a,b)| < 0$$

$\Longrightarrow$ fは (a,b) で極大でも極小でもない.

Pas Encore Montré.

2×2の対称行列の対角化.　　CT 233p.

transposition

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$　　${}^tA = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A$.　対称行列.

何故対称?

A の 2次形式.

$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = 5x^2 + 4xy + 2y^2$

$$\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

A の 2次形式を

回転座標変換で単純にする.

固有値を求める.

$$\lambda I_2 - A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\Phi_A(\lambda) = |\lambda I_2 - A| = \begin{vmatrix} \lambda - 5 & -2 \\ -2 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 5)(\lambda - 2) - 4$$

$$= \lambda^2 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 6)(\lambda - 1)$$

Aの固有値は $\lambda = 1, 6$. (eigen-value)

B : 2×2.

$|B| \neq 0 \iff B$: 正則 $\iff (B\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0})$

$|B| = 0 \iff B$: 正則でない $\iff$ ある $\vec{v} \neq \vec{0}$ に対して $B\vec{v} = \vec{0}$

① $\lambda \neq 1, 6$ 　 $|\lambda I_2 - A| \neq 0$ $\left((\lambda I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \right)$

$\Updownarrow$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

② $\lambda = 1$ のとき　 $|I_2 - A| = 0 \rightsquigarrow (I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ に $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ の解がある.

$\Updownarrow$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$

$\Longleftrightarrow 2x + y = 0$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ -2x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ $(x \neq 0)$

が固有値1の固有ベクトル

A 対称行列のとき必ず成立

⊥

$A\vec{v} = \lambda\vec{v}$ を満たす $\vec{v} \neq \vec{0}$ のことを固有値 λ の固有ベクトル

③ $\lambda = 6$ のとき.

$|6I_2 - A| = 0$

$\rightsquigarrow (6I_2 - A)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ を満たす $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}$ が存在.

$\Updownarrow$ 　 $\Updownarrow$

$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 6\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 　 $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Longleftrightarrow x - 2y = 0$

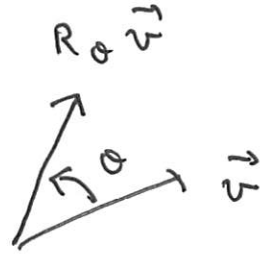
$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix} = y\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $(y \neq 0)$ が固有ベクトル.

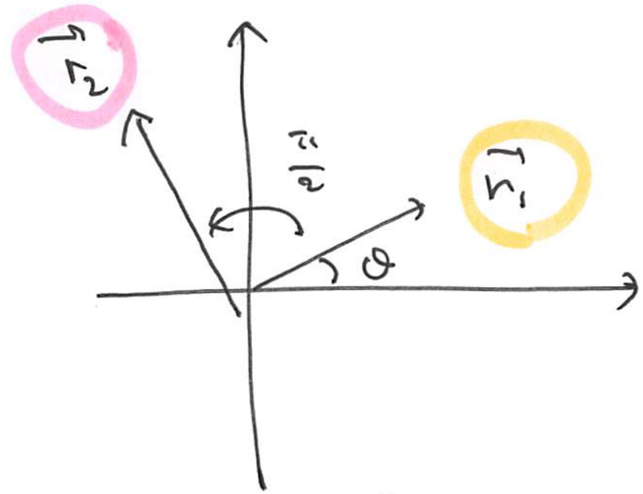
$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

(2) 回転行列

rotation.

$$= (\vec{r}_1 \ \vec{r}_2)$$



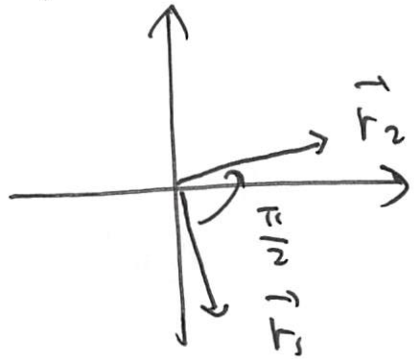


$$\|\vec{r}_1\| = \|\vec{r}_2\| = 1$$

$$(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = 0$$

← $-\vec{r}_2$ も同じ性質を満たす.

$$R = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$



$$AR = A(\vec{r}_1\ \vec{r}_2) = (A\vec{r}_1\ A\vec{r}_2) = (\vec{r}_1\ 6\vec{r}_2)$$

$$= (\vec{r}_1\ \vec{r}_2)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

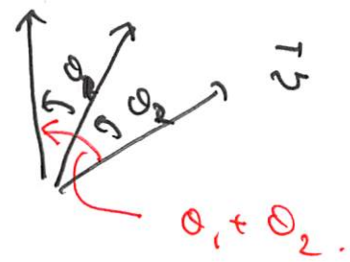
$$= R\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$(\vec{a}\ \vec{b})\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} = x\vec{a} + y\vec{b}$$

回転行列は正則.

$$R_{\theta_1}R_{\theta_2} = R_{\theta_1+\theta_2}$$

(各自計算)



$$\rightarrow\ R_\theta \cdot R_{-\theta} = R_{-\theta}\cdot R_\theta = R_0 = \begin{pmatrix}\cos 0 & -\sin 0\\ \sin 0 & \cos 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} = I_2$$

R_θ: 正則 $(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$.

$$AR = R\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$$

R^{-1}. $R^{-1}AR = R^{-1}R\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}$

$$\boxed{R^{-1}AR = \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 6\end{pmatrix}}$$

Aの回転行列による対角化.

何故 こんな ことをするか?

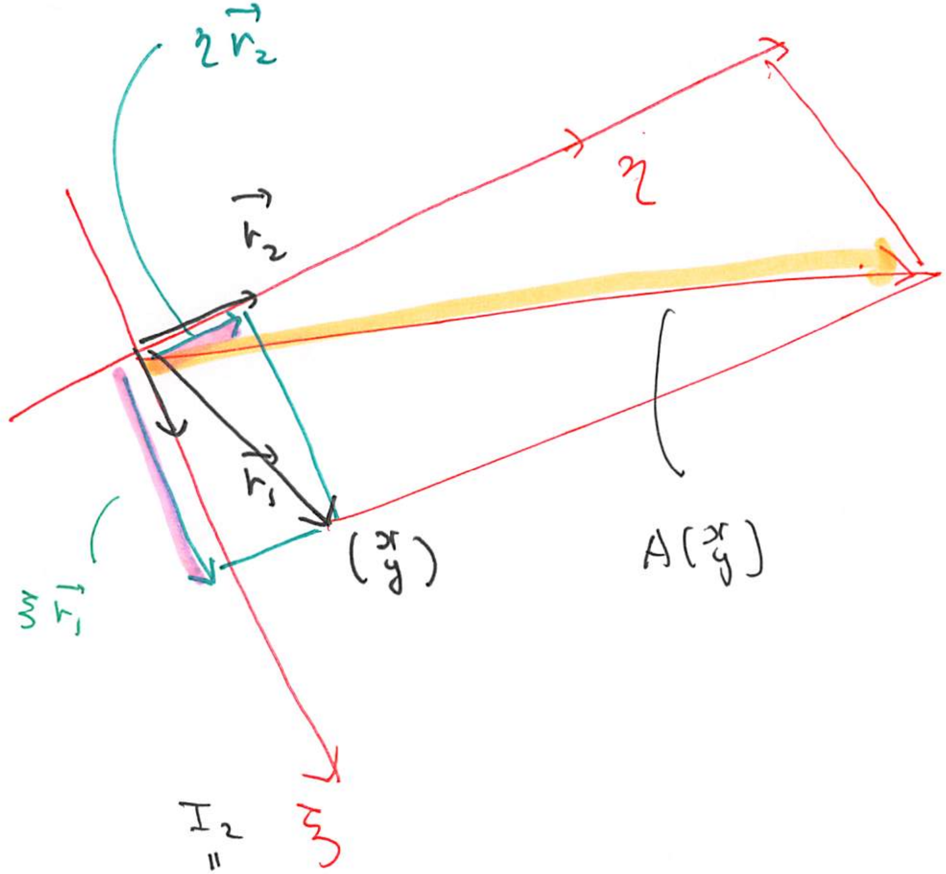
座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \xi \vec{r_1} + \eta \vec{r_2}$$

$$= (\vec{r_1}\ \vec{r_2}) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

$$= R \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$$

同値 $R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5x + 2y \\ 2x + 2y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \xi' \\ \eta' \end{pmatrix} = R^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = R^{-1} A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R^{-1} A \underbrace{R \cdot R^{-1}}_{I_2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ 6\eta \end{pmatrix}$$

(where $R^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}$)

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \left(R^{-1}A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(R^{-1}AR\cdot R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right) = \left(\begin{pmatrix}1&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}\right)$$

$$= \xi^2 + 6\eta^2.$$

$\|$

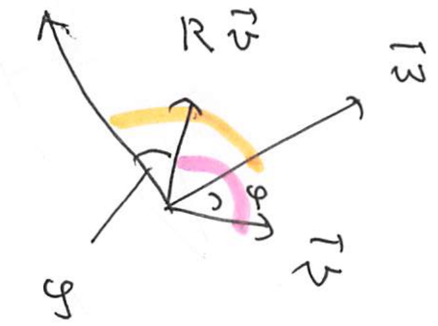
$5x^2 + 4xy + 2y^2$

クロス・ターム

R^{-1} は回転

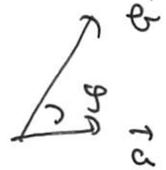
R : 回転

$$(R\vec{v}, R\vec{w}) = (\vec{v}, \vec{w})$$



平面, Rは逆回転.

$$(\vec{a}, \vec{b}) = \|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\varphi$$



$$(R_\theta)^{-1} = R_{-\theta}$$

$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ を 回転行列で対角化する。

(1) $\Phi_A(\lambda)$

(2) 固有ベクトルを求める

(3) 回転行列で対角化.

$$R^{-1} A R = \begin{pmatrix} *_1 & 0 \\ 0 & *_2 \end{pmatrix}$$