$z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y.$

$$\begin{cases} z_x = 2x + y - 4 = 0 \\ z_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \frac{-10}{-5} = 2, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = 0$$

$2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\parallel$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

以上で停留点は $(x, y) = (2, 0)$

Hesse行列.

$z_{xx} = 2, \quad z_{xy} = 1$

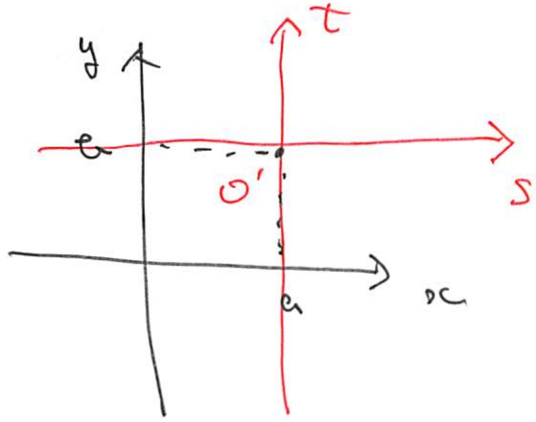
$z_{yx} = 1, \quad z_{yy} = -2$

$$H(z) = \begin{pmatrix} z_{xx} & z_{xy} \\ z_{yx} & z_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$|H(z)| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 < 0$$

より $(2, 0)$ において極大でも極小でもない.

$$z = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$$
$$= (x-a)^2 + (x-a)(y-b) - (y-b)^2 + f'$$
$$= s^2 + st - t^2 + f'$$



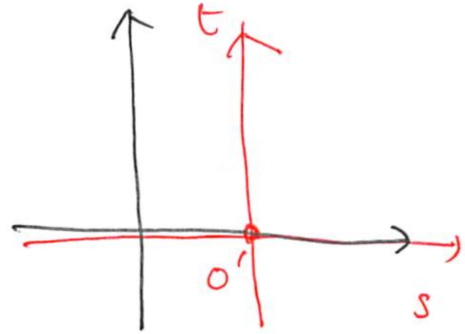
座標変換 $\begin{cases} s = x - a \\ t = y - b \end{cases}$

$$\{(t-a)^n\}' = n(t-a)^{n-1}$$

"=" の両辺を x, y で偏微分

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 2(x-a) + (y-b) \\ x - 2y - 2 = (x-a) - 2(y-b) \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 2b = 2 \end{cases} \rightsquigarrow a = 2,\ b = 0$$



f' を求める： $x = a = 2,\ y = b = 0$ とすると

$$-4 = f'$$

$z = s^2 + st - t^2 - 4$ となる. $= \dfrac{\sqrt{5}}{2} X^2 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} Y^2 - 4.$

cross-term 交叉項.

web にある.

$U(\subset \mathbb{R}^2)$ 開　$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$　$P_0(a, b) \in U$

$$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$$

Ⅰ　$f_{xx}(P_0) > 0$ （$<$）,　$\begin{vmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{vmatrix} > 0$

$\Longrightarrow$ P_0でfは極小（大）

Ⅱ　$\begin{vmatrix} & \end{vmatrix} < 0 \Longrightarrow$ fはP_0で極大でも極小でもない。

fはC^2級とする。

① Uの各点で $f_x, f_y, f_{xx}, f_{xy}, f_{yx}, f_{yy}$ が存在

② U ――― で f, ――――――――― が連続。

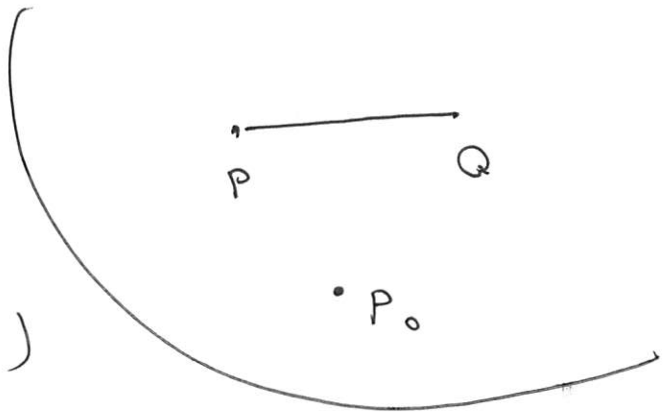
定理

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$P_0 \in U$

$U (\subset \mathbb{R}^2)$ 開, 凸

$\boxed{P, Q \in U \Rightarrow \overline{PQ} \subset U}$



1) $f_{xx}(P) > 0 \quad (P \in U)$

$<$

2) $\det(H(f))(P)$

$$= \begin{vmatrix} f_{xx}(P) & f_{xy}(P) \\ f_{yx}(P) & f_{yy}(P) \end{vmatrix} > 0$$

$(P \in U)$

3) $f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$

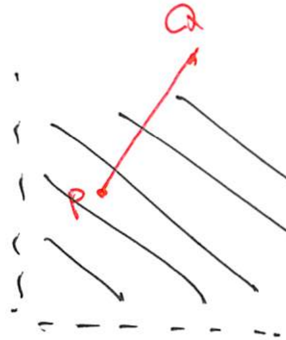
$$\Longrightarrow \quad f(P) > f(P_0) \quad (P \in U, P_0 \neq P)$$

$<$

ミクロへの応用.　　$p, q, r > 0$

$f(x, y)$ 生産関数. $(x, y > 0)$　　product

	生産要素 (production elements)			生産物
	A	B		C
投入量	x	y	$\longmapsto$	$f(x, y)$
価格	p	q		r



[illegible]凸

f に対する前提.

$$f_{xx}(P) < 0, \quad |H(f)|(P) > 0 \quad \left(P \in \underset{\{(x, y);\ x, y > 0\}}{\overset{}{\mathbb{R}^2_{++}}}\right)$$

$\mathbb{R}^2_{++} = \{(x, y);\ x, y > 0\}$

$$\pi(x, y) = r f(x, y) - px - qy.$$

利潤

$C x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ Cobb Douglas

コブ・ダグラス型.

(例) $\pi_x(x_0, y_0) = \pi_y(x_0, y_0) = 0$

$(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2_{++}$

$$\begin{cases} \pi_x = r f_x - p = 0 \\ \pi_y = r f_y - q = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad f_x(x_0, y_0) = \frac{p}{r}, \quad f_y(x_0, y_0) = \frac{q}{r}$$

$\pi_{xx} = r f_{xx}(x, y) < 0$, $\pi_{xy} = r f_{xy}$, $\pi_{yx} = r f_{yx}$

$\pi_{yy} = r f_{yy}$.

$$|H(\pi)| = \begin{vmatrix} r f_{xx} & r f_{xy} \\ r f_{yx} & r f_{yy} \end{vmatrix} = r^2 |H(f)| > 0$$

$\longrightarrow \quad \pi(x_0, y_0) > \pi(x, y) \quad \left(\begin{array}{l} (x_0, y_0) \neq (x, y) \\ (x, y) \in \mathbb{R}^2_{++} \end{array} \right)$

(31)

$$f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}}$$

$$f_x = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}}, \quad f_y = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}}$$

$$f_{xx} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{3}} < 0$$

$$f_{xy} = \frac{1}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}}, \quad f_{yy} = -\frac{2}{9} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{5}{3}}$$

$$\rotatebox{90}{=}$$

$$f_{yx}$$

$$|H(f)| = \begin{vmatrix} -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}} y^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{9} x^{-\frac{2}{3}} y^{-\frac{2}{3}} & -\frac{2}{9} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{5}{3}} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{4}{9^2} - \frac{1}{9^2} \right) x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{27} x^{-\frac{4}{3}} y^{-\frac{4}{3}} > 0$$

停留点を求める。

$$\begin{cases} \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{p}{r} \\ \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{q}{r} \end{cases}$$

$$\longrightarrow \begin{cases} x^{-\frac{2}{3}} y^{\frac{1}{3}} = \frac{3p}{r} & \cdots ① \\ x^{\frac{1}{3}} y^{-\frac{2}{3}} = \frac{3q}{r} & \cdots ② \end{cases}$$

log をとる方法もある

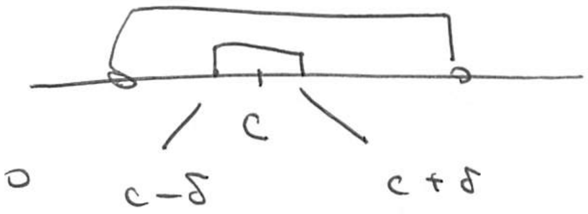
$$①^2 \times ② \quad \frac{1}{x} = \frac{9p^2}{r^2} \cdot \frac{3q}{r} = \frac{27p^2 q}{r^3}$$

$$x = \frac{r^3}{27p^2 q}, \quad y = \frac{r^3}{27pq^2}$$

$x(p,q,r)$, $y(p,q,r)$ ← 生産要素需要関数

最大(小)の定理 $\Longrightarrow$ 極大(小)の定理

定理 $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$



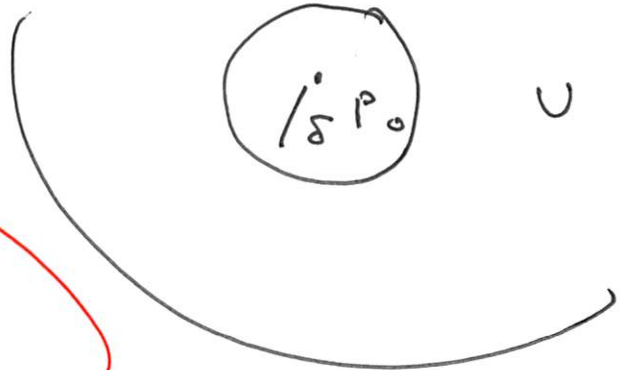
fは $t = c$ で連続 $f(c) > 0$

$\Longrightarrow$ $\exists \delta > 0$ に対して

$f(t) > 0 \quad (c - \delta < t < c + \delta)$

定理 $U (\subset \mathbb{R}^2)$ 開 $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$P_0 \in U$, $g(P_0) > 0$, gは P_0で連続



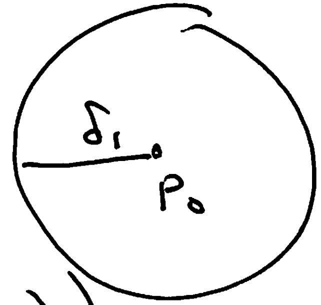
$\Longrightarrow$ $\exists \delta > 0$ に対し

$g(P) > 0 \quad (P \in B_\delta(P_0))$

$\left(P_\ell \to P_0 \ (\ell \to +\infty) \Longrightarrow g(P_\ell) \longrightarrow g(P_0) \right)$

極小の定理を導く.　$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$,　$f : C^2$級

(I)　f_{xx} : P_0で連続, $f_{xx}(P_0) > 0$ $\longrightarrow$ $\exists \delta_1 > 0$　$f_{xx}(P) > 0$　$(P \in B_{\delta_1}(P_0))$



(II)　$|H(f)(P)| = f_{xx}(P)\, f_{yy}(P) - f_{xy}(P)^2$

P_0で連続　　　連続 + 連続 → 連続
×, ÷

$|H(f)(P_0)| > 0$

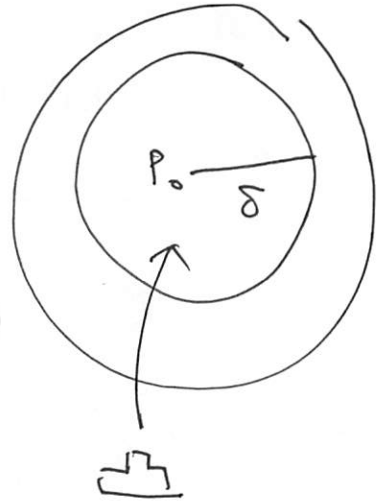
$\longrightarrow$ $\exists \delta_2 > 0$

$|H(f)(P)| > 0$　$(P \in B_{\delta_2}(P_0))$

$\delta = \min(\delta_1, \delta_2) \leq \delta_1, \delta_2$ とおくと

$f_{xx}(P) > 0, \quad |H(f)(P)| > 0$

$(P \in \underbrace{B_\delta(P_0)}_{凸})$



$f_x(P_0) = f_y(P_0) = 0$

$\longrightarrow$

最大・最小の定理 $\quad f(P) > f(P_0) \quad (P \neq P_0,\ P \in B_\delta(P_0))$

$f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

の停留点を求めて極大・極小を判定.