$z = f(x, y) = x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y$

の停留点を求めて，極大・極小を判定.

$$\begin{cases} f_x = 2x + y - 4 = 0 \\ f_y = x - 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

より $x = \dfrac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}} = \dfrac{-10}{-5} = 2$

$y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{-5} = \dfrac{0}{-5} = 0$

より 停留点は $(x, y) = (2, 0)$ である.

$f_{xx} = 2,\ f_{xy} = f_{yx} = 1,\ f_{yy} = -2$

より $H(f)(2, 0) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -5 < 0$

よって $(2, 0)$ において f は極大でも極小でもない

補足

$$x^2 + xy - y^2 - 4x - 2y \quad (\#)$$

$$= (x-a)^2 + (x-a)(y-b) - (y-b)^2 + c$$

の両辺を x, y で偏微分して

$$\begin{cases} 2x + y - 4 = 2(x-a) + y - b \\ x - 2y - 2 = (x-a) - 2(y-b) \end{cases}$$

が常に成立する。これは

$$\begin{cases} 2a + b = 4 \\ a - 2b = 2 \end{cases}$$

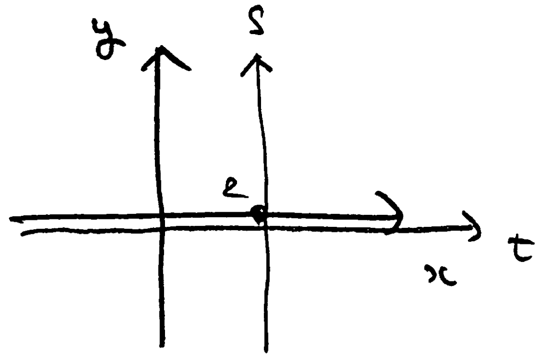
となるので $a = 2,\ b = 0$ である。

$$x = a = 2,\quad y = b = 0$$

を (#) に代入すると　$4 - 8 = c$ より $c = -4$ となる。

$$f(x, y) = (x-2)^2 + (x-2)y - y^2 - 4$$

であることが従う。



$$\begin{cases} s = x - 2 \\ t = y \end{cases}$$

と座標変換すると

$$z = s^2 + st - t^2 - 4$$

となる。

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -1 \end{pmatrix}$$

に対して固有値は

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - \frac{5}{4}$$

より $\lambda = \pm\frac{\sqrt{5}}{2}$ である。

$\underline{\lambda = \frac{\sqrt{5}}{2} のとき}$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{2}-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{5}}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

は $y = (\sqrt{5}-2)x$ と必要十分であるので

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (\sqrt{5}-2)x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトル

$\underline{\lambda = -\frac{\sqrt{5}}{2} のとき}$

$$\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{5}}{2}-1 & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{5}}{2}-1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

は $y = (-\sqrt{5}-2)x$ と必要十分であるので

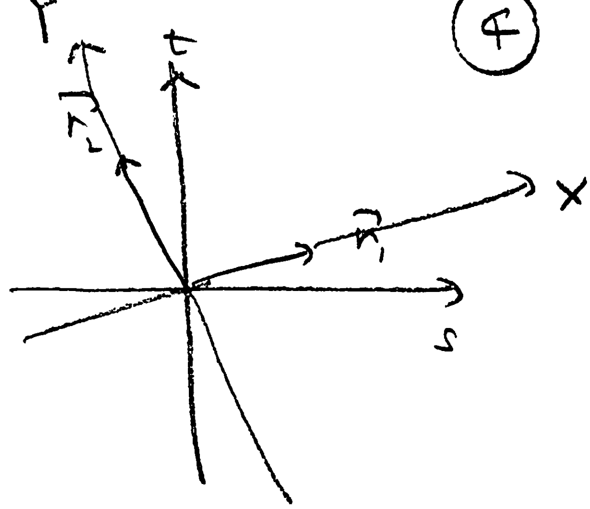
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ (-\sqrt{5}-2)x \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0)$$

が固有ベクトル

$$R = (\vec{r_1}\ \vec{r_2}) \qquad \vec{r_1} = \frac{1}{10-4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{5}-2 \end{pmatrix} \quad とすると$$

$$\vec{r_2} = \frac{1}{10+4\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{5}-2 \end{pmatrix}$$

は 回転行列で



$$\begin{pmatrix}s\\t\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$

とすると

$$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(R^{-1}AR\cdot R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, R^{-1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$$

↑

R^{-1}は回転

$$= \left(\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & -\frac{\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}\right)$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{2}X^2 - \frac{\sqrt{5}}{2}Y^2$$

となる.