2015/10/14

I

$x^2 - xy + y^2 - 1 = 0$ の $(0,1)$ における接線.

$$g(x,y) = x^2 - xy + y^2 - 1$$

とおくと $\quad g_x = 2x - y,\ g_y = -x + 2y$

より

$$g_x(0,1) = -1,\ g_y(0,1) = 2$$

より 求める接線の方程式は

$$(-1)(x-0) + 2(y-1) = 0$$

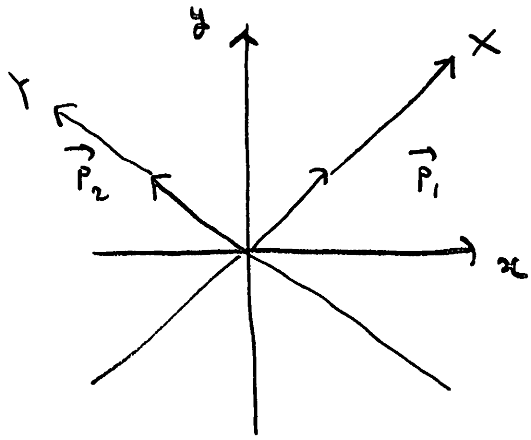
すなわち

$$-x + 2(y-1) = 0$$

補足 $\quad \vec{p_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\ \vec{p_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ とおくと

$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$ は回転行列である.

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = X\vec{p_1} + Y\vec{p_2}$$
$$= (\vec{p_1}\ \vec{p_2})\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$
$$= P\begin{pmatrix}X\\Y\end{pmatrix}$$



すなわち

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}X - Y\\X + Y\end{pmatrix}$$

と変数変換を行うと

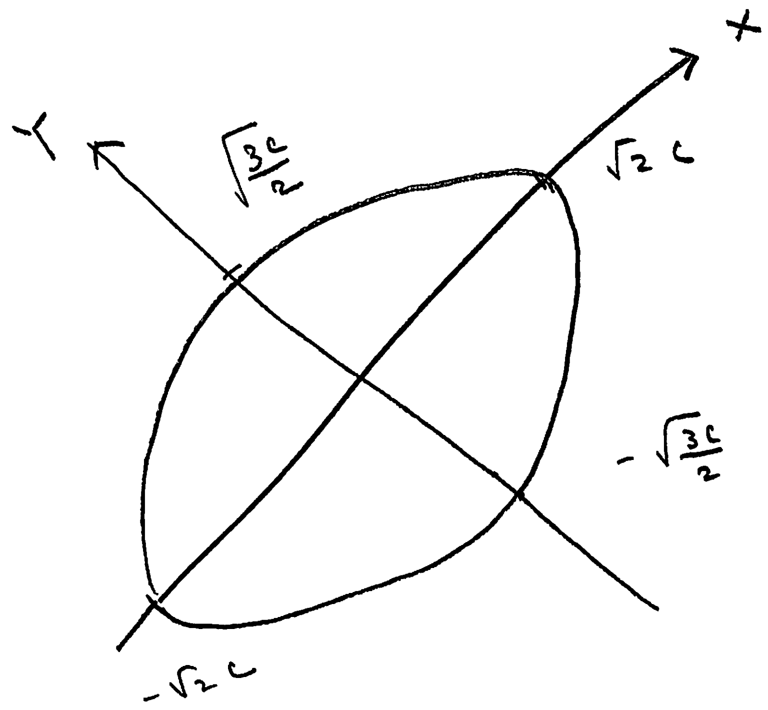
$$x^2 - xy + y^2 = (x+y)^2 - 3xy$$

$$= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2X \right\}^2 - 3 \cdot \frac{1}{2} (X^2 - Y^2)$$

$$= \frac{1}{2} X^2 + \frac{3}{2} Y^2$$

となる. $c > 0$ とし

$x^2 - xy + y^2 = c$ は



と楕円となることが分かる.

II

$z = x^2 - 3xy + y^2 - 1$ の $(1, 0, 0)$ における接平面

$z_x = 2x - 3y$, $z_y = -3x + 2y$ より

$$z_x(1, 0) = 2, \quad z_y = (1, 0) = -3$$

であるので 接平面は

$$z = 2(x-1) - 3y + 0$$

$$= 2(x-1) - 3y$$

III

$z = x^4 + y^4 + 2x^2 - 4xy + 2y^2$ の停留点

$$z_x = 4x^3 + 4x - 4y = 4(x^3 + x - y) \quad \cdots ①$$

$$z_y = 4y^3 - 4x + 4y = 4(y^3 - x + y) \quad \cdots ②$$

① + ② より

$$4(x^3 + y^3) = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 0$$

より

$x + y = 0 \cdots ③$ または $x^2 - xy + y^2 = 0 \cdots ④$

が必要である.

③ $x + y = 0$ のとき　$y = -x$ を ①, ② に代入すると

$$-x^3 + 2x = -x^3 - 2x = 0$$

となる　$x^3 + 2x = x(x^2 + 2)$ において $x^2 + 2 > 0$ より

$x = 0$. このとき $y = 0$. よって　$(0, 0)$

④ $x^2 - xy + y^2 = 0$ のとき.

$$\left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 0 \text{ より}$$

$$x - \frac{y}{2} = y = 0$$

$$\boxed{\begin{gathered} A, B \geqq 0 \\ A + B = 0 \\ \Longrightarrow A = B = 0 \end{gathered}}$$

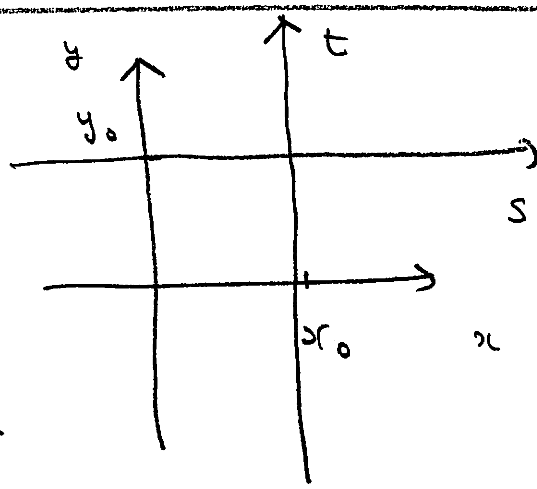
より $x = y = 0$ を得るが, これは①, ②を満たす.

よって z の停留点は $(x, y) = (0, 0)$

IV

$$f(x,y) = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

を平行移動の座標変換で簡略化



$$\begin{cases} s = x - x_0 \\ t = y - y_0 \end{cases}$$

と変数変換を行なう.

$$x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$$

$\sharp$ $$= (x - x_0)^2 + 4(x - x_0)(y - y_0) + 2(y - y_0)^2 + f'$$

が常に成立するように x_0, y_0 を求める.

両辺を x, y で偏微分すると

$$\begin{cases} 2x + 4y - 6 = 2(x - x_0) + 4(y - y_0) \\ 4x + 4y - 8 = 4(x - x_0) + 4(y - y_0) \end{cases}$$

より

$$\begin{cases} 2x_0 + 4y_0 = 6 \\ 4x_0 + 4y_0 = 8 \end{cases}$$

が従う. これを解くと $x_0 = y_0 = 1$ となる $\sharp$ に

$$x = x_0 = 1, \quad y = y_0 = 1$$

を代入すると

$$-7 = f'$$

となる

以上から

$$\begin{cases} s = x - 1 \\ t = y - 1 \end{cases}$$

により

$$z = s^2 + 4st + 2t^2 - 7$$

となる.