2変数の偏微分,積分.

ミクロ経済学をよく理解するため.

toy model

teeny model.

① 生産理論.

生産要素 A, B

生産物 product

投入量 $x, y \longmapsto z = f(x, y)$

f : 生産関数.

r

価格 p, q

利潤 profit

$$\pi(x, y) = r f(x, y) - px - qy.$$

を最大化する. → 解. $x(p, q, r), y(p, q, r)$

p, q, r を動かす.

例

$f(x, y) = A x^{\alpha} y^{\beta}$ コブ・ダグラス型.

Ⅱ 消費者理論 consumer theory.

Goods.

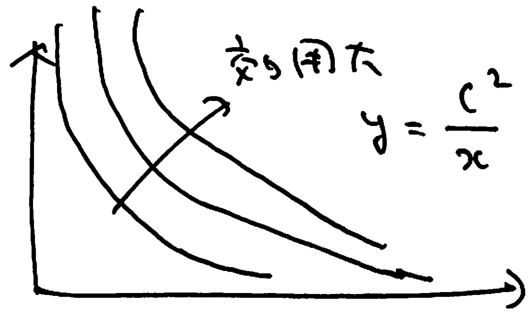
	A	B.
需要量	x	y
価格	p	q.

効用関数 $u(x, y)$

utility function

(例) $u(x, y) = \sqrt{xy}$.

$\sqrt{xy} = c > 0 \quad xy = c^2 \quad y = \frac{c^2}{x}$



無差別曲線.

<u>問題</u> $I = px + qy$

↗ income

予算一定の下で $z = u(x, y)$

を最大化.

Lagrange の未定乗数法.

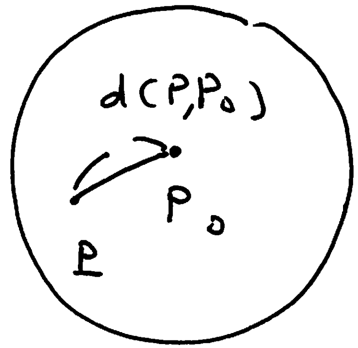
開集合.

246p. $\delta > 0$, $P_0 \in \mathbb{R}^2$ distance

$$B_\delta(P_0) = \{ P \in \mathbb{R}^2 ; d(P, P_0) < \delta \}$$

中心 P_0, 半径 $\delta > 0$ の開円盤

radius an open disc

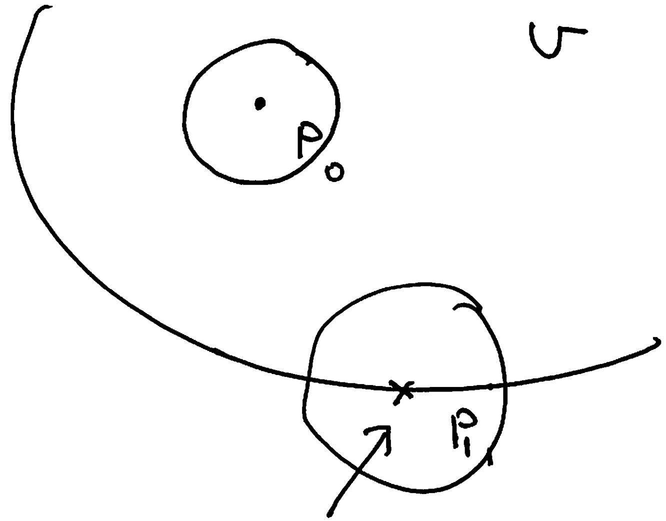


開集合. $U \subset \mathbb{R}^2$ が開集合.

$P_0 \in U$ を任意にとると ある $\delta > 0$ に対して

$$B_\delta(P_0) \subset U$$

が成立



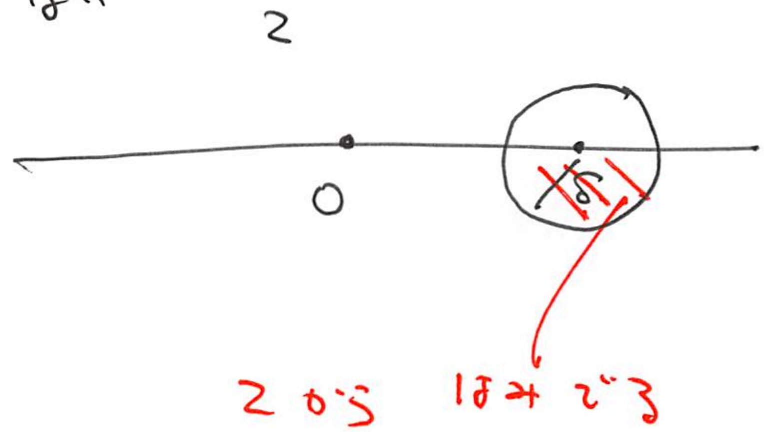
はみでる. $P_1 \in U$ とすると

U は開集合でない

例　$Z = \{(x, y) ;\ y \geqq 0\}$ は開でない

↑　　任意の $\delta > 0$ に対して

248p
例 8.3.　$B_\delta((x, 0)) \not\subset Z$



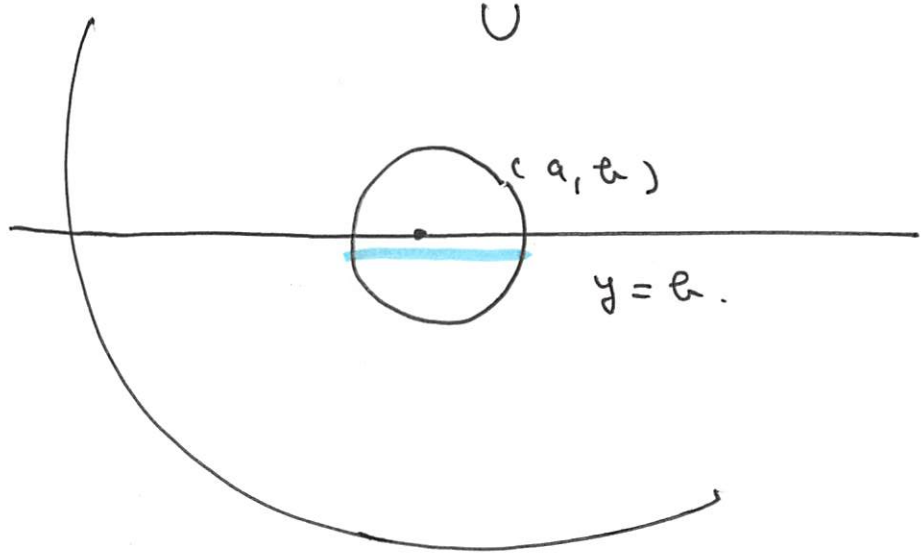
偏微分 264p.

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開集合

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

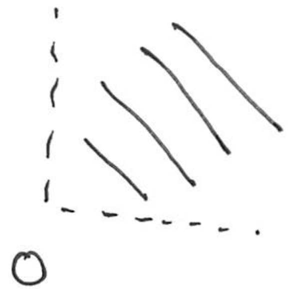
$F(x) = f(x, b)$

$(a, b) \in U$
U が開 $\Bigg\} \leadsto$ ある $\delta > 0$ $B_\delta((a, b)) \subset U$



$U = \mathbb{R}^2$

$\mathbb{R}^2_{++} = \{(x, y) ; x, y > 0\}$



F は少なくとも

$a - \delta < x < a + \delta$

で定義されている

$F'(a) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b)$

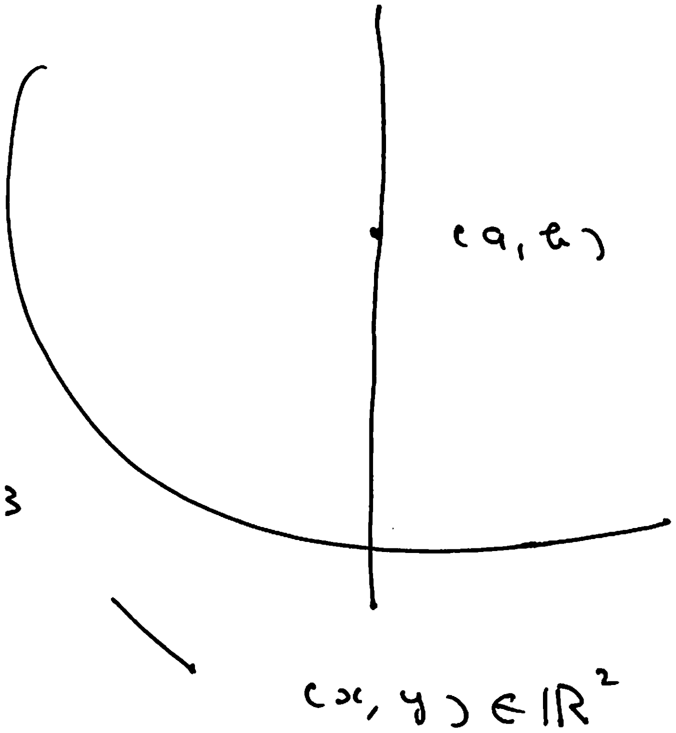
↑

存在するとする

f の (a, b) における x に関する偏微分係数、書く.

$$G(y) = f(a, y)$$

$$G'(b) = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$



例 8.10

$$z = f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3$$

(a, b)において考える.

$$F(x) = x^3 + 2b^2 x + b^3$$

$$F'(x) = 3x^2 + 2b^2$$

$$\longrightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 3a^2 + 2b^2$$

$$G(y) = a^3 + 2ay^2 + y^3$$

$$G'(y) = 0 + 4ay + 3y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 4ab + 3b^2$$

演習 8.8 (1)

$$f(x, y) = x^3 + 2x^2 y + 5y^4.$$

xに関する偏微分.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 2y \cdot 2x + 0$$

$$= 3x^2 + 4xy.$$

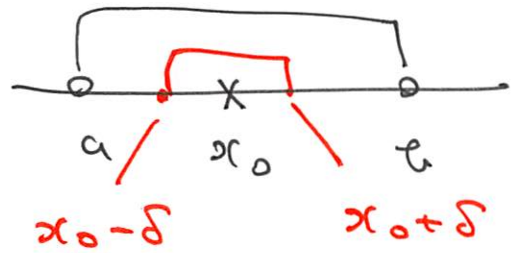
yに関する偏微分

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 + 2x^2 \cdot 1 + 20y^3$$

$$= 2x^2 + 20y^3$$

極大・極小

復習. $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, 各点で微分可能.



x_0 の近くで最小 (大)

$x_0 \in (a, b)$ で 極小 (大)

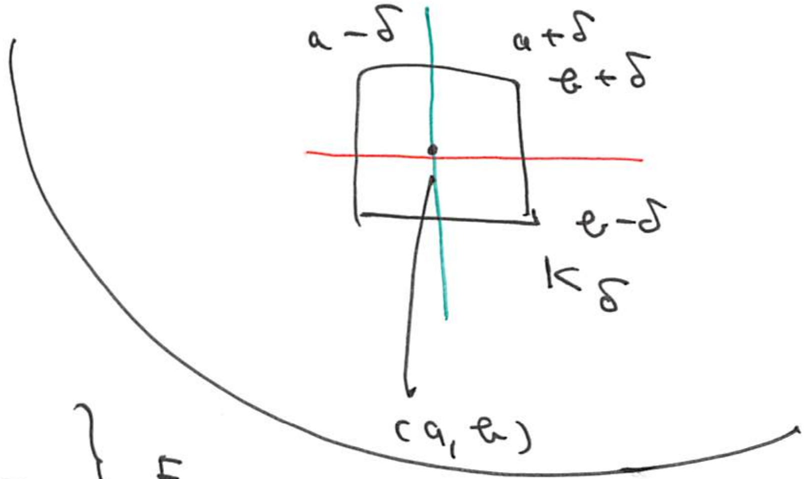
$\Longrightarrow F'(x_0) = 0$

ある $\delta > 0$ に対して

$F(x_0) \leq F(x)$ $\quad (x_0 - \delta < x < x_0 + \delta)$

$\geq$

$U \subset \mathbb{R}^2$ 開　$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$



$(a, b) \in U$

f が (a, b) 極大．とは
(‖)

ある $\delta > 0$ に対して

$K_\delta = \{ (x, y) ; \; a - \delta < x < a + \delta, \; b - \delta < y < b + \delta \}$ で

f は 最大．
(‖)

$f(x, y) \leq f(a, b) \quad ((x, y) \in K_\delta)$

⇒

⟶ $F(x) \leq F(a) \quad (a + \delta < x < a - \delta)$

⟶ F は $x = a$ で 極大

⟶ $F'(a) = 0$ ⟶ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0$

定理 f が (a, b) で極大(小)

定理 8.18. $\Longrightarrow \dfrac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$

(a, b) は停留点

例 8.11 $z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y$.

$$z_x = 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0$$
$$= 2x + 4y - 6 = 0$$
$$z_y = 0 + 4x \cdot 1 + 4y - 0 - 8$$
$$= 4x + 4y - 8 = 0$$

$\left(z_x = \dfrac{\partial z}{\partial x}, \quad z_y = \dfrac{\partial z}{\partial y} \right.$.

$$\begin{cases} 2x + 4y = 6 \\ 4x + 4y = 8 \end{cases} \qquad D = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) = -8$$

$$x = \frac{1}{-8} \begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} = 1$$

$$y = \frac{1}{-8} \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = 1$$

(x, y) で極大・極小

$\Downarrow$

$(x, y) = (1, 1)$

実は $(1, 1)$ で極大でも極小でもない.

クラメール.

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases}$$

$D = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ のとき.

$$x = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} \alpha & b \\ \beta & d \end{vmatrix}$$

$$y = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} a & \alpha \\ c & \beta \end{vmatrix}$$

I (1) $z = x^2 - xy + y^2 - 2y + 4x$. に対して停留点を求める

(2) $z = \dfrac{1}{x^2 + y^2}$ に対して z_x, z_y を計算

II

(1) $\left(\begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ?$

(2) $\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ?$