$V \subset \mathbb{R}^n$ は部分空間とする. $\vec{v}_0 \in V$ が $\vec{g} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$\text{(＊)} \quad \|\vec{g}-\vec{v}\|^2 \geqq \|\vec{g}-\vec{v}_0\|^2 \quad (\forall \vec{v} \in V)$$

を満たすとする. このとき

$$\vec{g}-\vec{v}_0 \perp V$$

が成立する.

$$\|\vec{g}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{g}-\vec{v}_0+\vec{v}_0-\vec{v}\|^2$$
$$= \|\vec{g}-\vec{v}_0\|^2 + 2(\vec{g}-\vec{v}_0, \vec{v}_0-\vec{v}) + \|\vec{v}_0-\vec{v}\|^2$$

となるので条件(＊)は

$$2(\vec{g}-\vec{v}_0, \vec{v}_0-\vec{v}) + \|\vec{v}_0-\vec{v}\|^2 \geqq 0 \quad (\forall \vec{v} \in V)$$

と必要十分である. $\forall \vec{w} \in V$ に対して

$$2(\vec{g}-\vec{v}_0, \vec{v}_0-\vec{w}) + \|\vec{v}_0-\vec{w}\|^2 \geqq 0$$

とみる. 任意の $\vec{v} \in V$ に対して $\vec{w} = \vec{v}_0-\vec{v}$ とおくと $\vec{w} \in V$ であるので

$$2(\vec{g}-\vec{v}_0, \vec{v}) + \|\vec{v}\|^2 \geqq 0$$

が従う. ここで $t \in \mathbb{R}$ に対して $t\vec{v} \in V$ であるので

$$2(\vec{g}-\vec{v}_0, t\vec{v}) + \|t\vec{v}\|^2 \geqq 0$$

すなわち

$$\text{(＃)} \quad t^2\|\vec{v}\|^2 + 2t(\vec{g}-\vec{v}_0, \vec{v}) \geqq 0$$

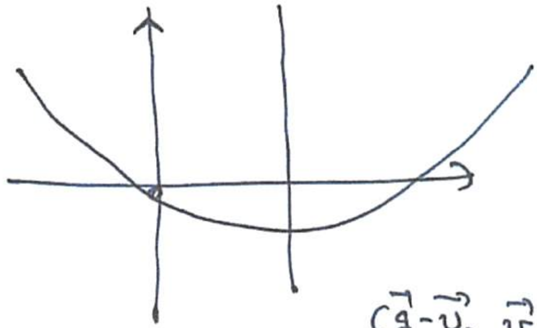
が任意の $t \in \mathbb{R}$ で成立する.

$\vec{v} = \vec{0}$ ならば $(\vec{g}-\vec{v}_0, \vec{0}) = 0$ より以下では $\vec{v} \neq \vec{0}$ とすると $\|\vec{v}\|^2 > 0$ である.

もし $(\vec{g}-\vec{v_0}, \vec{v}) \neq 0$ ならば # の左辺は t の関数として下のようになるので # とならない。よって

$$(\vec{g}-\vec{v_0}, \vec{v}) = 0$$

が従う。



$$t = -\frac{(\vec{g}-\vec{v_0}, \vec{v})}{\|\vec{v}\|^2}$$

以上で

$$\vec{g}-\vec{v_0} \perp V$$

が示せた。