第 4 章

行列式

4.1　2 次の行列式

4.1.1　クラメールの公式と行列式の定義

2 次正方行列と 2 次元ベクトル

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}$$

で定まる連立 1 次方程式 $A\vec{v} = \vec{\alpha}$ すなわち

$$\begin{cases} ax + by = \alpha_1 & \qquad (1) \\ cx + dy = \alpha_2 & \qquad (2) \end{cases}$$

を考えます．$(1) \times d - (2) \times b$ を計算すると

$$(ad - bc)x = \alpha_1 d - \alpha_2 b$$

を得ます．定理 2.7 （46 ページ）の直後で注意したように，2 次正方行列の**行列式** $(determinant)$ を

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \tag{4.1}$$

と定めると，この式は

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix}$$

となります．ここで

$$\det(A) = ad - bc \neq 0$$

を仮定すれば

$$x = \frac{\begin{vmatrix} \alpha_1 & b \\ \alpha_2 & d \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{4.2}$$

と計算されます．同様に計算すれば

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a & \alpha_1 \\ c & \alpha_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}} \tag{4.3}$$

と計算されます．この公式を**クラメールの公式** (*Cramer's rule*) と呼びます．

演習 4.1. 上の y に関する公式 (4.3) を導いてください．

演習 4.2. 次の行列式を計算しましょう．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ **(5)** $\begin{vmatrix} a & c \\ 0 & b \end{vmatrix}$ **(6)** $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & b \end{vmatrix}$

4.1.2　行列式の性質

2 次正方行列の基本的な性質について説明します．

定理 4.1. **(i)**（各列の線型性）

$$\det(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\ \vec{b}) = \lambda \det(\vec{x}\ \vec{b}) + \mu \det(\vec{y}\ \vec{b})$$

$$\det(\vec{a}\ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda \det(\vec{a}\ \vec{x}) + \mu \det(\vec{a}\ \vec{y})$$

(ii)（交代性）$\det(\vec{a}\ \vec{b}) = -\det(\vec{b}\ \vec{a})$

(ii)'（交代性）$\det(\vec{a}\ \vec{a}) = 0$

(iii)（正規性）$\det(I_2) = 1$

定理 4.1 の **(i)** を証明するために，次の補助定理 4.1 を証明しましょう．

補助定理 4.1. $F:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

この補助定理 4.1 は

$$\begin{aligned} F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) &= F\left(\begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu y_1 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_2(\lambda x_2 + \mu y_2) \\ &= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2) + \mu(a_1y_1 + a_2y_2) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y}) \end{aligned}$$

によって証明されます．ここで

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

と見て

$$F(\vec{x}) = \begin{vmatrix} x_1 & b_1 \\ x_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad G(\vec{x}) = \begin{vmatrix} a_1 & x_1 \\ a_2 & x_2 \end{vmatrix}$$

に対して補助定理 4.1 を適用すると

$$\left|\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}\ \vec{b}\right| = \lambda\left|\vec{x}\ \vec{b}\right| + \mu\left|\vec{y}\ \vec{b}\right|,\ |\vec{a}\ \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}| = \lambda|\vec{a}\ \vec{x}| + \mu|\vec{a}\ \vec{y}|$$

が従います.

演習 4.3. 上の定理 *4.1* の **(ii)** と **(ii)'** を証明してください．ただし **(ii)'** は **(ii)** を用いて証明してください.

定理 4.1 以外の行列式の基本的な性質を説明します.

定理 4.2. (i) （行列の積の行列式） $A, X \in M_2(\mathbf{R})$ に対して

$$\det(AX) = \det(A)\det(X)$$

が成立します.

(i) （転置行列の行列式）

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

Proof. ここでは **(i)** のみ証明します（**(ii)** は演習 4.4 とします）.

$$A = \begin{pmatrix} \vec{\alpha} & \vec{\beta} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix}$$

と定めると

$$\begin{aligned} \det(AX) &= \det \begin{pmatrix} x_1\vec{\alpha} + x_2\vec{\beta} & y_1\vec{\alpha} + y_2\vec{\beta} \end{pmatrix} \\ &= x_1y_1 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\alpha}) + x_1y_2 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) + y_1x_2 \det(\vec{\beta}\ \vec{\alpha}) + x_2y_2 \det(\vec{\beta}\ \vec{\beta}) \\ &= x_1y_2 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) - y_1x_2 \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) \\ &= (x_1y_2 - x_2y_1) \det(\vec{\alpha}\ \vec{\beta}) = \det(X)\det(A) \end{aligned}$$

□

演習 4.4. 定理 *4.2* の **(ii)** を証明してください．これに加えて定理 *4.2* の **(ii)** を用いて定理 *4.1* の列に関する性質から

$$\det \begin{pmatrix} \lambda\boldsymbol{a} + \mu\boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{b} + \mu\boldsymbol{c} \end{pmatrix} = \lambda \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} + \mu \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{pmatrix}$$

を導いてください.

次に 2 次正方行列の**正則性**について考えてみます．定理 2.7 の証明における計算を繰り返しますが

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix} = \det(A) \cdot I_2 \end{aligned}$$

となります．ここで $\det(A) = ad - bc \neq 0$ のとき

$$X = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

と定めると

$$AX = XA = I_2$$

を得ます．これから $\det(A) \neq 0$ のとき A は正則で

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

であることが分かります．

逆に行列 A が正則とします．このとき $AA^{-1} = I_2$ から

$$\det(A)\det(A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I_2) = 1$$

が従います．このとき $\det(A) \neq 0$ が従います．これから次の定理 4.3 が示されました（定理 2.7 の内容と同一ですが，証明の後半は異なります）．

定理 4.3. $A \in M_2(\mathbf{R})$ に対して，

$$A \text{ が正則行列である} \iff \det(A) \neq 0$$

が成立します．

この定理 4.3 で示した正則性の特徴付けは，2 次正方行列に限らず成立します．127 ページの定理 4.16 で一般的な場合を証明します．

演習 4.5. 次の行列式の値が 0 となる λ の値を求めましょう．

(1) $\begin{vmatrix} \lambda-5 & -2 \\ -2 & \lambda-2 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} \lambda-4 & -1 \\ -2 & \lambda-3 \end{vmatrix}$

4.2　3 次の行列式

4.2.1　定義と順列の符号

3 次元ベクトル

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を定めます．このとき 3 次正方行列

$$A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$$

に対して，A の行列式を

$$\det(A) = |A| = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

と定義します．

さらに 2 次の行列式を展開すると

$$|A| = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \tag{4.4}$$

となります．ここで

$$i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i,\ i, j, k \in \{1, 2, 3\}$$

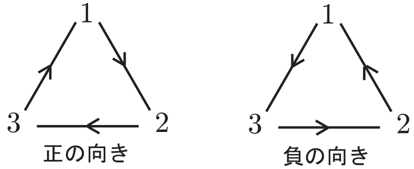
を満たす $(i\ j\ k)$ 全体を S_3 とすると，$(i\ j\ k) \in S_3$ に対してだけ

$$a_ib_jc_k$$

が現れていることに注意しましょう．このような $(i\ j\ k)$ は $3! = 6$ 通りであることが分かります．$a_ib_jc_k$ の前の符号に関しては

$$i \longrightarrow j \longrightarrow k \longrightarrow i$$

が正の向きの場合に正であり，負の場合に負であることも分かります．



ここで $i \neq j,\ j \neq k, k \neq i$ を満たす $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して

$$\varepsilon(i\ j\ k) = \begin{cases} +1 & ((i\ j\ k) \text{ が正の向き}) \\ -1 & ((i\ j\ k) \text{ が負の向き}) \end{cases}$$

と定めます．これを用いると上の 3 次正方行列 $A = (\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})$ に対して

$$\det(A) = \sum_{i \neq j,\ j \neq k, k \neq i} \varepsilon(i\ j\ k) \cdot a_ib_jc_k \tag{4.5}$$

が成立することに注意しましょう．

後に使うために $(i\ j\ k) \in S_3$ の符号に関して別の見方を紹介します．右のように 2 つの番号を交換する操作 (**互換**) を繰り返して $(1\ 2\ 3)$ に並び換えていくときに，偶数回で到達する場合は $(i\ j\ k)$ は正の向き，奇数回で到達する場合は $(i\ j\ k)$ は負の向きになっています．

$$
\begin{aligned}
&(1\ 2\ 3)\\
&(1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)\\
&(2\ 1\ 3) \to (1\ 2\ 3)\\
&(2\ 3\ 1) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)\\
&(3\ 1\ 2) \to (1\ 3\ 2) \to (1\ 2\ 3)\\
&(3\ 2\ 1) \to (1\ 2\ 3)
\end{aligned}
$$

後に一般の次数の行列式を考えるときには，この形で符号を考えます（98 ページの演習 4.13 を参照）．

4.2.2　列に関する性質

■**基本性質**　次に (4.4) において b_1，b_2，b_3（または c_1，c_2，c_3）について整理すると，次の各列に関する**余因子展開**が成立することにも注意しよう（余因子については後に 4.3.5 節で説明します）．

$$
\begin{aligned}
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
&= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix} \\
&= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

この余因子展開を用いると行列式の列に関する基本的な性質をいくつか導くことができます．

(I) **(各列に関する線型性)** 例えば 1 列に関して

$$
\begin{vmatrix} \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \vec{\alpha} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \vec{\beta} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{4.6}
$$

が成立します．

この性質は 2 次正方行列の性質 **(I)** と同様に証明できます．そのためには補助定理 4.1 と同様の次の補助定理 4.2 を用います．

補助定理 4.2. $F: \ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R} \quad \vec{x} \mapsto a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$ は

$$F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$$

を満たします.

演習 4.6. 補助定理 *4.2* を証明して，(4.6) を示しましょう.

(II) (交代性) 相異なる 2 列を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \tag{4.7}$$

が成立します.

2 次正方行列に対する行列式の交代性を用いて，(4.7) を証明します．実際

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} &= c_1 \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_3 & b_3 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \\ &= -c_1 \begin{vmatrix} b_2 & a_2 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} + c_2 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_3 & a_3 \end{vmatrix} - c_3 \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{a} & \vec{c} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

と証明されます.

最後に次の性質 **(III)** は具体的に計算すれば示せます.

(III) (正規性) 単位行列 I_3 の行列式は

$$|I_3| = 1$$

となります.

■基本性質から導かれる性質　以上の **(I)**，**(II)**，**(III)** が行列式の基本的な性質です．これからいくつかの性質を導くことができます.

(IV) 異なる 2 列が等しいとき行列式の値は 0 となります．例えば

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = 0 \tag{4.8}$$

が成立します．

この場合は 1 列と 2 列を交換すると性質 **(II)** から

$$\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix}$$

が得られることから，(4.8) が従います．性質 **(II)** から次の性質 **(II)'** も得られます．

(II)' $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して

$$|\ \vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k\ | = \varepsilon(i\ j\ k) \cdot |\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ |$$

が成立します．

例えば

$$|\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_1\ | = -|\ \vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2\ | = |\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3\ |$$

と示すことができます．上で互換を用いて説明した $\varepsilon(2\ 3\ 1)$ の意味を思い出しましょう．

(V) $i \neq j$ のとき j 列に i 列の λ 倍を加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$|\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad (\vec{b} + \lambda\vec{a}) \quad \vec{c}\ |$$

が成立します．

これは

$$(\text{右辺}) = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ | + \lambda |\ \vec{a} \quad \vec{a} \quad \vec{c}\ | = |\ \vec{a} \quad \vec{b} \quad \vec{c}\ |$$

から従います．

次に行列の積の行列式に関する公式を紹介します．

(VI) 3 次正方行列 $A,\ X \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det(XA) = \det(X) \cdot \det(A) \tag{4.9}$$

が成立します.

(4.9) にある公式 **(VI)** を証明しましょう．そのために A を $A = \left(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\right)$ と

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix},\ \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},\ \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

を用いての列ベクトル表示します．そして

$$X = (\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

と行列 X を列ベクトル表示します．すると証明すべき式の左辺を計算していくと

$$\begin{aligned} \det(XA) &= \det(X\vec{a}\ X\vec{b}\ X\vec{c}) \\ &= \det\left(a_1\vec{x}_1 + a_2\vec{x}_2 + a_3\vec{x}_3\ X\vec{b}\ X\vec{c}\right) \\ &= \sum_{i=1}^{3} a_i \det(\vec{x}_i\ X\vec{b}\ X\vec{c}) \end{aligned}$$

となります．次に 2 列を線型性によって展開します．例えば $\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_1\ X\vec{c}) = 0$ を用いて

$$\begin{aligned} \det\left(\vec{x}_1\ X\vec{b}\ X\vec{c}\right) &= \det\left(\vec{x}_1\ \ (b_1\vec{x}_1 + b_2\vec{x}_2 + b_3\vec{x}_3)\ \ X\vec{c}\right) \\ &= b_2\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ X\vec{c}\right) + b_3\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ X\vec{c}\right) \end{aligned}$$

と計算されます．これと同様の計算を残る 2 項に対して行うと

$$\begin{aligned} \det(XA) = a_1b_2\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ X\vec{c}\right) &+ a_1b_3\det\left(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ X\vec{c}\right) \\ +a_2b_1\det\left(\vec{x}_2\ \vec{x}_1\ X\vec{c}\right) &+ a_2b_3\det\left(\vec{x}_2\ \vec{x}_3\ X\vec{c}\right) \\ +a_3b_1\det\left(\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ X\vec{c}\right) &+ a_3b_2\det\left(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ X\vec{c}\right) \end{aligned}$$

を得ます．最後の式の 6 項の 3 列を展開すると

$$\begin{aligned}\det(XA) &= a_1b_2c_3\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3) + a_1b_3c_2\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_3\ \vec{x}_2)\\ &\qquad +a_2b_1c_3\det(\vec{x}_2\ \vec{x}_1\ \vec{x}_3) + a_2b_3c_1\det(\vec{x}_2\ \vec{x}_3\ \vec{x}_1)\\ &\qquad +a_3b_1c_2\det(\vec{x}_3\ \vec{x}_1\ \vec{x}_2) + a_3b_2c_1\det(\vec{x}_3\ \vec{x}_2\ \vec{x}_1)\\ &= a_1b_2c_3\cdot\varepsilon(1\ 2\ 3)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3) + a_1b_3c_2\cdot\varepsilon(1\ 3\ 2)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)\\ &\qquad +a_2b_1c_3\cdot\varepsilon(2\ 1\ 3)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3) + a_2b_3c_1\cdot\varepsilon(2\ 3\ 1)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)\\ &\qquad +a_3b_1c_2\cdot\varepsilon(3\ 1\ 2)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3) + a_3b_2c_1\cdot\varepsilon(3\ 2\ 1)\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)\end{aligned}$$

を得ます．ここで最後に

$$\det(\vec{x}_i\ \vec{x}_j\ \vec{x}_k) = \varepsilon(i\ j\ k)\cdot\det(\vec{x}_1\ \vec{x}_2\ \vec{x}_3)$$

が成立することを用いました．さらに $\det(X)$ で括ると

$$\begin{aligned}\det(XA) &= \det(X)\cdot(a_1b_2c_3\cdot\varepsilon(1\ 2\ 3) + a_1b_3c_2\cdot\varepsilon(1\ 3\ 2) + a_2b_1c_3\cdot\varepsilon(2\ 1\ 3)\\ &\qquad + a_2b_3c_1\cdot\varepsilon(2\ 3\ 1) + a_3b_1c_2\cdot\varepsilon(3\ 1\ 2) + a_3b_2c_1\cdot\varepsilon(3\ 2\ 1))\\ &= \det(X)\cdot\det(A)\end{aligned}$$

と公式 (VI) が証明されました．

■転置行列の行列式　3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}$ の転置行列の行列式

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}$$

を考えます．ここでは簡単のために $a_1 \neq 0$ の場合を考えます．A において 1 行の $-\dfrac{a_2}{a_1}$ 倍を 2 行に加えて，1 行の $-\dfrac{a_3}{a_1}$ 倍を 3 行に加えると

$$R\left(1,3,-\frac{a_3}{a_1}\right)R\left(1,2,-\frac{a_2}{a_1}\right)A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ 0 & b_2' & c_2'\\ 0 & b_3' & c_3'\end{pmatrix}$$

となります．このことから

$${}^tA\,{}^tR\left(1,2,-\frac{a_2}{a_1}\right){}^tR\left(1,3,-\frac{a_3}{a_1}\right) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0\\ b_1 & b_2' & b_3'\\ c_1 & c_2' & c_3'\end{pmatrix}$$

も従います．ここで基本行列の行列式に関して

$$\left|R\left(1,2,-\frac{a_2}{a_1}\right)\right| = \left|R\left(1,3,-\frac{a_3}{a_1}\right)\right| = \left|{}^tR\left(1,2,-\frac{a_2}{a_1}\right)\right| = \left|{}^tR\left(1,3,-\frac{a_3}{a_1}\right)\right| = 1$$

が成立することを用いると

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ 0 & b_2' & c_2' \\ 0 & b_3' & c_3' \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2' & c_2' \\ b_3' & c_3' \end{vmatrix}$$

$$\det({}^tA) = \begin{vmatrix} a_1 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2' & b_3' \\ c_1 & c_2' & c_3' \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2' & b_3' \\ c_2' & c_3' \end{vmatrix} - b_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c_2' & c_3' \end{vmatrix} + c_1 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ b_2' & b_3' \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2' & b_3' \\ c_2' & c_3' \end{vmatrix}$$

が従います．ここで $B \in M_2(\mathbf{R})$ に対して $\det({}^tB) = \det(B)$ が成立すること（定理 4.2**(ii)**）を用いると

$$\det({}^tA) = \det(A)$$

を得ます．以上で次の定理 4.4 を示しました．

定理 4.4. $A \in M_3(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A) \tag{4.10}$$

が成立します．

演習 4.7. $a_1 = 0,\ a_2 \neq 0$ の場合に (4.10) を証明しましょう．

定理 4.4 を用いると，列に関して今まで説明した性質が行の性質についても成立することを示せます．すなわち以下の性質が成立します．

(I)（行に関する線型性）　行列式は各行において線型です．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が 2 行の線型性として成立します．

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する線型性を用いると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \left|{}^t\boldsymbol{a} \quad {}^t(\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{y}) \quad {}^t\boldsymbol{c}\right| = \left|{}^t\boldsymbol{a} \quad \lambda{}^t\boldsymbol{x}+\mu{}^t\boldsymbol{y} \quad {}^t\boldsymbol{c}\right|$$

$$= \lambda\left|{}^t\boldsymbol{a} \quad {}^t\boldsymbol{x} \quad {}^t\boldsymbol{c}\right| + \mu\left|{}^t\boldsymbol{a} \quad {}^t\boldsymbol{y} \quad {}^t\boldsymbol{c}\right| = \lambda\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{y} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

と証明できます.

(II)（**交代性**） 相異なる 2 行を交換すると行列式の値は (-1) 倍されます．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

が成立します.

これは転置をしても行列式の値が変わらないことと列に関する交代性を用いると

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \left|{}^t\boldsymbol{a} \quad {}^t\boldsymbol{b} \quad {}^t\boldsymbol{c}\right| = -\left|{}^t\boldsymbol{a} \quad {}^t\boldsymbol{c} \quad {}^t\boldsymbol{b}\right| = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix}$$

と証明されます.

以上で説明した行に関する性質 **(I)** と **(II)** を用いると次の性質 **(IV)** と性質 **(II)'**, 性質 **(V)** が従います．これらは，列に関する同様の性質を導いたのと同様に示すことができます.

(IV) 相異なる 2 行が等しい行列式の値は 0 です.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{b} \end{vmatrix} = 0$$

(II)' $(i\ j\ k) \in S_3$ に対して（$1 \leq i, j, k \leq 3$ と $i \neq j,\ j \neq k,\ k \neq i$ を満たす 3 個の番号の順列 $(i\ j\ k)$ のことです.）

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_i \\ \boldsymbol{x}_j \\ \boldsymbol{x}_k \end{vmatrix} = \varepsilon(i\ j\ k) \begin{vmatrix} \boldsymbol{x}_1 \\ \boldsymbol{x}_2 \\ \boldsymbol{x}_3 \end{vmatrix}$$

が成立します.

(V) $i \neq j$ のとき i 行の λ 倍を j 行に加えても行列式の値は変わりません．例えば

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} + \lambda \boldsymbol{a} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \end{vmatrix}$$

が成立します.

行列式の具体的な計算方法として，行に関する性質 **(V)** と性質 **(II)** を用いて 1 列の成分が 1 行以外 0 となるように行基本変形するやり方があります．これは定理 4.4 の証明の中でも使ったアイデアですが，加えて余因子展開を用いると 2 次の行列式を計算することに持ち込むことができます．例えば

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = 2(2 \cdot 6 - 2 \cdot 3) = 12$$

と計算されます．最後に 3 次から 2 次になっているところは 1 列の余因子展開を用いました.

演習 4.8. 次の行列式の値を求めましょう.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$　**(2)** $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$　**(3)** $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix}$　**(4)** $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$

■**クラメールの公式**　次に $x,\ y,\ z$ に関する 3 元連立 1 次方程式

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = \alpha_1 & \cdots(1) \\ a_2x + b_2y + c_2z = \alpha_2 & \cdots(2) \\ a_3x + b_3y + c_3z = \alpha_3 & \cdots(3) \end{cases}$$

を考えます．2 元連立方程式に帰着させるために，z を消去します．そのために $(1)\times c_2-(2)\times c_1$ を考えると

$$
\begin{array}{rrcll}
 & a_1c_2x+b_1c_2y & = & \alpha_1c_2 & \cdots(1)\times c_2 \\
-) & a_2c_1x+b_2c_1y & = & \alpha_2c_1 & \cdots(2)\times c_1 \\
\hline
 & \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_1 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} y & = & \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_2 & c_2 \end{vmatrix} & \cdots(\mathrm{I})=(1)\times c_2-(2)\times c_1
\end{array}
$$

を得ます．同様に $(1)\times c_2-(3)\times c_1$ と $(2)\times c_3-(3)\times c_2$ を考えると

$$
\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & c_1 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{II})=(1)\times c_3-(3)\times c_1
$$

$$
\begin{vmatrix} a_2 & c_2 \\ a_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_2 & c_2 \\ \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \cdots(\mathrm{III})=(2)\times c_3-(3)\times c_2
$$

を得ることができます．

$-b_1\times(\mathrm{III})+b_2\times(\mathrm{II})-b_3\times(\mathrm{I})$ を 2 列の余因子展開を用いて計算すると

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

が従います．ここで

$$
\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = 0 \tag{4.11}
$$

より

$$
Dx = \begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad \left(\text{ただし } D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \right)
$$

が得られます．したがって $D\neq 0$ のとき

$$
x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

が得られました．y と z についても同様な解の公式があり，次の定理 4.5 が証明できます．

定理 4.5. （クラメールの公式）$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0$ のとき連立 1 次方程式 *(1),(2),(3)* の解は

$$x = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} \alpha_1 & b_1 & c_1 \\ \alpha_2 & b_2 & c_2 \\ \alpha_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad y = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & \alpha_1 & c_1 \\ a_2 & \alpha_2 & c_2 \\ a_3 & \alpha_3 & c_3 \end{vmatrix}, \quad z = \frac{1}{D}\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \alpha_1 \\ a_2 & b_2 & \alpha_2 \\ a_3 & b_3 & \alpha_3 \end{vmatrix}$$

で与えられます．

演習 4.9. $a_1 \times$ *(III)* $- a_2 \times$ *(II)* $+ a_3 \times$ *(I)* を計算して定理 *4.5* の y の公式を導いてください．

演習 4.10. 次の連立 1 次方程式をクラメーの公式を用いて解きましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2.3　ベクトルの外積・行列式の幾何学的な意味

ベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ の**外積**（**ベクトル積**）を右のように定めます．外積 $\vec{b} \times \vec{c}$ は

$$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}, \qquad \vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$$

を満たします．そのことを示すために公式

$$\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{a}) = (\vec{b} \times \vec{c}, \vec{a}) \tag{4.12}$$

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \end{pmatrix}$$

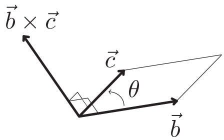
が成立することに注意します．これは，左辺の 3 列の余因子展開から分かります．この公式を用いると

$$(\vec{b} \times \vec{c}, \vec{b}) = \det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}) = 0$$

が従い，$\vec{b} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ が分かります．また $\vec{c} \perp \vec{b} \times \vec{c}$ も同様です．

次に $\vec{b} \times \vec{c}$ の大きさについて注意します．2 本のベクトル $\vec{b}$ と $\vec{c}$ が定める平行四辺形の面積 S について考えます．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ のなす角を θ とします．このとき

$$
\begin{aligned}
S &= ||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \sin\theta \\
&= ||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= ||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}|| \cdot \sqrt{1-\left(\frac{(\vec{b},\vec{c})}{||\vec{b}|| \cdot ||\vec{c}||}\right)^2} \\
&= \sqrt{||\vec{b}||^2 \cdot ||\vec{c}||^2 - (\vec{b},\vec{c})^2}
\end{aligned}
$$



から

$$
\begin{aligned}
S^2 &= ||\vec{b}||^2 \cdot ||\vec{c}||^2 - (\vec{b},\vec{c})^2 \\
&= \left(b_1^2+b_2^2+b_3^2\right)\left(c_1^2+c_2^2+c_3^2\right) - (b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3)^2 \\
&= \begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}^2 = ||\vec{b}\times\vec{c}||^2
\end{aligned}
$$

を得ます．すなわち

$$S = ||\vec{b}\times\vec{c}|| \tag{4.13}$$

を示しました．$\vec{b}$ と $\vec{c}$ に垂直で大きさが S であるベクトルは 2 本ありますが，そのどちらが $\vec{b}\times\vec{c}$ になるのについて軽く説明します．座標系が**右手系**の場合は，$\vec{b}$ から $\vec{c}$ へ右手の親指以外の 4 本の指を揃えて向かうときに親指が向かう方向が $\vec{b}\times\vec{c}$ です（**右ねじの向き**）．また座標系が**左手系**の場合は，同じことを左手で行います．（前ページの図は，右手系の場合を考えています．）詳しくは述べられませんが (4.12) を用いて得られる

$$\det(\vec{b}\ \vec{c}\ \vec{b}\times\vec{c}) = ||\vec{b}\times\vec{c}||^2 > 0$$

が $\vec{b}\times\vec{c}\neq\vec{0}$ であるときに成立することから，$\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{b}\times c$ が標準単位ベクトルを用いた $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ と同じ「向き」を持ちます．このことから以上の事実が示せます．

公式 (4.13) を用いて，3 次の行列式の幾何的な性質について説明します．3 本のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行 6 面体の体積を V とします．$\vec{b}$, $\vec{c}$ が定める平行四辺形を底面として体積 V を考えます．すると垂直方向 $\vec{b}\times\vec{c}$ と $\vec{a}$ とのなす角を φ とすると，高さ h は

$$h = |\ ||\vec{a}|| \cdot \cos\varphi\ | = \left| ||\vec{a}|| \cdot \frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{a}|| \cdot ||\vec{b}\times\vec{c}||} \right| = \left| \frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||} \right|$$

と計算されます．これから

$$V = S \cdot h = ||\vec{b}\times\vec{c}|| \cdot \left| \frac{(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})}{||\vec{b}\times\vec{c}||} \right| = \left|(\vec{a},\vec{b}\times\vec{c})\right| = \left|\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c})\right|$$

となります．

演習 4.11. ベクトルの外積について以下の性質が成立することを示しましょう．
(1) $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a},\quad \vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$　**(2)** $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

演習 4.12. $\vec{a}={}^t(1\ 1\ 0)$, $\vec{b}={}^t(0\ 1\ -1)$, $\vec{c}={}^t(1\ 2\ 3)$ に対して，以下を求めましょう．
(1) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ が張る平行四辺形の面積．　**(2)** $\vec{a}$ と $\vec{b}$ に直交する単位ベクトル．
(3) $\vec{a}$ と $\vec{b}$, $\vec{c}$ が張る平行六面体の体積．

4.3　n 次の行列式

4.3.1　順列・置換とその符号

■順列と置換　3 次の行列式を表現する方法の 1 つに，$1,2,3$ を並べた順列 $(i\ j\ k)\in S_3$ を用いて

$$\begin{vmatrix}\vec{a} & \vec{b} & \vec{c}\end{vmatrix}=\sum_{(i\ j\ k)\in S_3}\varepsilon(i\ j\ k)\cdot a_ib_jc_k \tag{4.14}$$

と定義するものがありました．一般に n 次の正方行列 $A\in M_n(\mathbf{R})$ に対して行列式を定義するのに，この表現を拡張することを考えます．そのために順列の符号 $\varepsilon(i\ j\ k)$ を定義する必要が生じます．この 4.3.1 節では，順列とその符号について議論します．

3 次の行列式であれば $1,2,3$ を並べた順列 $(i\ j\ k)$ として話を進めても十分でしたが，これを少し言い換えることにします．例えば順列 $(3\ 1\ 2)$ は写像

$$\sigma:\ \{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3\}$$

で条件

$$\sigma(1)=3,\ \sigma(2)=1,\ \sigma(3)=2$$

を満たすものと考えます．順列 $(i\ j\ k)\in S_3$ は写像写像

$$\tau:\ \{1,2,3\}\longrightarrow\{1,2,3\}$$

で条件

$$\tau(1)=i,\ \tau(2)=j,\ \tau(3)=k$$

を満たすものですが，i, j, k が $1,2,3$ を並べたものですから τ は全射でかつ単射，すなわち全単射であることが分かります．

逆に

$$\rho\colon \{1,2,3\} \longrightarrow \{1,2,3\}$$

が全単射であるとき，$(\rho(1),\rho(2),\rho(3))$ は $1,2,3$ を並べたものとなります．実際，ρ が単射であることから，$\rho(1),\rho(2),\rho(3)$ は相異なります．また ρ が全射であることから $\{\rho(1),\rho(2),\rho(3)\}=\{1,2,3\}$ となります．

このように以下では，$1,2,\cdots,n$ を並べた順列 $(i_1,i_2,\cdots,i_n)$ と全単射

$$\sigma\colon \{1,2,\cdots,n\} \longrightarrow \{1,2,\cdots,n\}$$

で

$$\sigma(1)=i_1,\cdots,\sigma(n)=i_n$$

を満たすものと考えます．全単射として考えたときに σ のことを n 次の**置換**と呼びます．そして

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

と記します．

以下では n 次の置換全体の集合を S_n で表します．

■置換の符号　　$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i_1 & i_2 & i_3 \end{pmatrix}$ に対してはすでに符号 $\varepsilon(i_1,i_2,i_3)$ を定義しています．これと整合的になるように $\sigma\in S_n$ に対して符号を定義します（整合性については演習 4.13 を参照）．$1\le i<j\le n$ を満たす $i,\ j$ に対して

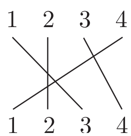
$$\sigma(i)>\sigma(j)$$

であるとき (i,j) は σ で反転されるといいます．例えば

$$\sigma=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

においては

$$\begin{aligned} \sigma(1)&=3>2=\sigma(2) \\ \sigma(1)&=3>1=\sigma(4) \\ \sigma(2)&=2>1=\sigma(4) \\ \sigma(3)&=4>1=\sigma(4) \end{aligned}$$



から $(1,2)$, $(1,4)$, $(2,4)$, $(3,4)$ が σ によって反転されます．このことは右上図から

すぐに分かります．すなわち，i と $\sigma(i)$ を結んだ線分と j と $\sigma(j)$ を結んだ線分が交わっている場合が反転している (i,j) に対応するからです．

一般に $\sigma \in S_n$ によって反転される (i,j) の個数を σ の**反転数**と呼びます．そして反転数が偶数のとき σ を**偶置換**と呼び，奇数のとき**奇置換**と呼びます．このとき置換 σ の**符号**を

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1 & (\sigma\text{が偶置換}) \\ -1 & (\sigma\text{が奇置換}) \end{cases}$$

と定めます．

演習 4.13. $\sigma \in S_3$ に対して反転数を求め $\varepsilon(\sigma)$ を計算しましょう．

演習 4.14. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 6 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix}$ の反転数と符号を求めましょう．

以下では 2 段階にわたって置換の符号を言い換えていきます．そのために総和の記号に対応する積の記号を定めます．以下では A を有限集合

$$A = \{a_1, \cdots, a_n\}$$

とします．そして

$$f : A \longrightarrow \mathbf{K}$$

を $\mathbf{K}$ に値をとる A 上の函数とします．このとき積の記号を

$$\prod_{a \in A} f(a) := f(a_1) \cdots f(a_n)$$

と定めます．この積の記号については必要に応じてその性質を説明していくことにします．

次に $\{1, \cdots, n\}$ の 2 点集合の全体の集合として

$$\Omega_n := \{\{i,j\}; i \neq j,\ i,j \in \{1,2,\cdots,n\}\}$$

と定めます．例えば $n=3$ と $n=4$ の場合は

$$\Omega_3 := \{\{1,2\},\{1,3\},2,3\}$$

$$\Omega_4 := \{\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},2,3,\{2,4\},\{3,4\}\}$$

となります．これを用いると $\sigma \in S_n$ に対して

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) := \prod_{\{i,j\} \in \Omega_n, i<j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i-j} \tag{4.15}$$

と定義できます．例えば

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

のときは

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}(\sigma) &= \frac{3-2}{1-2} \cdot \frac{3-4}{1-3} \cdot \frac{3-1}{1-4} \cdot \frac{2-4}{2-3} \cdot \frac{2-1}{2-4} \cdot \frac{4-1}{3-4} \\ &= (-1)\frac{2-3}{1-2} \cdot \frac{3-4}{1-3} \cdot (-1)\frac{1-3}{1-4} \cdot \frac{2-4}{2-3} \cdot (-1)\frac{1-2}{2-4} \cdot (-1)\frac{1-4}{3-4} \\ &= (-1)^4 = +1 \end{aligned}$$

と計算されます．この途中の計算で (-1) が 4 回出てきましたが，σ によって反転される $\{i, j\}$ に対応していることに注意してください．

一般に $\sigma \in S_n$ とすると，$\{i, j\} \in \Omega_n$ に対して σ が単射ですから $\sigma(i) \neq \sigma(j)$ となります．このことから

$$\{\sigma(i), \sigma(j)\} \in \Omega_n$$

が分かります．さらに写像

$$\sigma^{\#} : \Omega_n \longrightarrow \Omega_n \quad \{i, j\} \mapsto \{\sigma(i), \sigma(j)\}$$

を定義すると，$\sigma^{\#}$ は全単射であることが分かります．このことから $\{i, j\} \in \Omega_n$ に対して $\tilde{\varepsilon}$ の定義を与えた (4.15) の分子および分子の双方に

$$i - j \text{ または } -(i - j)$$

がただ 1 回現れることが分かり

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \pm 1$$

が従います．さらに $i < j$ のときに $\sigma(i) > \sigma(j)$ ならば反転数が 1 個増えて，同時に $\tilde{\varepsilon}(\sigma)$ の符号が (-1) 倍されることに注意すれば

$$\tilde{\varepsilon}(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$$

であることも従います．

演習 4.15. 上の $\sigma^{\#}$ が全単射であることを示しましょう．ただし次の定理を用いて単射であること示すだけで十分です．

定理　X を有限集合とします．このとき $f : X \to X$ に対して

$$f \text{ は全射である} \Leftrightarrow f \text{ は全射である}$$

置換の符号についてさらにもう一段階の言い換えを行いますが，そのためにはさらに準備が必要となります．

■置換の積　$\sigma,\ \tau \in S_n$ を考えましょう．

$$\sigma:\ \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\},\quad \tau:\ \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}$$

を合成した

$$\tau\circ\sigma:\ \{1,2,\cdots,n\} \to \{1,2,\cdots,n\}\quad i \mapsto \tau(\sigma(i))$$

も全単射となりますから，$\tau\circ\sigma \in S_n$ であることが分かります．写像の合成の記号 $\circ$ を省略して $\tau\sigma$ と記します．

まず具体的に合成の例を紹介しましょう．

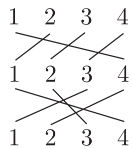
$$\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ \omega = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

とします．このとき

$$\begin{aligned} \omega\rho(1) &= \omega(\rho(1)) = \omega(4) = 2, & \omega\rho(2) &= \omega(\rho(2)) = \omega(1) = 4 \\ \omega\rho(3) &= \omega(\rho(3)) = \omega(2) = 3, & \omega\rho(4) &= \omega(\rho(4)) = \omega(3) = 1 \end{aligned}$$

から

$$\omega\rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$



であることが分かります．

演習 4.16. $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ と $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ に対して $\sigma\tau$ と $\tau\sigma$ を計算しましょう．

　一般に

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} W$$

と 3 つの写像があるとしましょう．このとき合成の順序について

$$(h\circ g)\circ f = f\circ(g\circ h)$$

が成立します．このことから 3 個の置換 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3 \in S_n$ に対して

$$\sigma_1(\sigma_2\sigma_3) = (\sigma_1\sigma_2)\sigma_3$$

が成立することが従います．従って行列の積と同様に $\sigma_1,\cdots,\sigma_\ell \in S_n$ に対して

$$\sigma_1\cdots\sigma_\ell$$

が紛れることなく定義できることが分かります．

置換の積の符号に関して重要な性質を示すために，総和と積の記号について補足をします．有限集合 A と写像

$$f : A \to \mathbf{K}, \quad g : A \to \mathbf{K}$$

があるとします．このとき

$$\prod_{a \in A} f(a)g(a) = \left(\prod_{a \in A} f(a)\right) \cdot \left(\prod_{a \in A} g(a)\right) \tag{4.16}$$

が成立します．これは

$$f(a_1)g(a_1) \cdots f(a_n)g(a_n) = f(a_1) \cdots f_{a_n} \cdot g(a_1) \cdots g(a_n)$$

に他なりません．さらに全単射

$$\varphi : A \to A$$

があるとしましょう．このとき

$$\prod_{a \in A} f(\varphi(a)) = \prod_{a \in A} f(a) \tag{4.17}$$

$$\sum_{a \in A} f(a) = \sum_{a \in A} f(\varphi(a)) \tag{4.18}$$

が成立します．例えば (4.16) の左辺は

$$f(\varphi(a_1)) \cdots f(\varphi(a_i)) \cdots f(\varphi(a_n))$$

ですが，i が動くとき $\varphi(a_i)$ が A のすべての要素にただ一度通ることを考えると理解できるはずです．

以上の準備で置換の積の符号について以下の定理 4.6 が示せます．

定理 4.6. $\sigma, \sigma' \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$$

が成立します．

Proof.

$$
\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma\sigma') &= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma\sigma'(i)-\sigma\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \cdot \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma(\sigma'(i))-\sigma(\sigma'(j))}{\sigma'(i)-\sigma'(j)} \cdot \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} \\
&= \prod_{\{k,\ell\},k<\ell} \frac{\sigma(k)-\sigma(\ell)}{k-\ell} \cdot \prod_{\{i,j\},i<j} \frac{\sigma'(i)-\sigma'(j)}{i-j} = \varepsilon(\sigma)\cdot\varepsilon(\sigma')
\end{aligned}
$$

以上の式変形において (4.16), (4.17) を用いていることに注意しましょう．特に (4.17) を適用するにあたって

$$\sigma'^{\#} : \Omega_n \to \Omega_n$$

が全単射であることを用いています． □

■置換の逆　一般に集合 X から集合 Y への写像

$$f:\ X \longrightarrow Y$$

が全単射であるとします．このとき $y \in Y$ に対してただ 1 つの $x \in X$ が存在して

$$f(x) = y \tag{4.19}$$

が成立します．このとき写像

$$f^{-1}:\ Y \longrightarrow X$$

を (4.19) を用いて $f^{-1}(y) = x$ によって定義します．$f^{-1}:\ Y \longrightarrow X$ も全単射になることに注意しましょう．

置換について具体例を見てみましょう．4 次の置換

$$\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

を考えましょう．$\sigma(x) = 1$ を満たすのは $x = 2$ ですから $\sigma^{-1}(1) = 2$ です．$\sigma(x) = 2$ を満たすのは $x = 3$ ですから $\sigma^{-1}(2) = 3$ です．これを繰り返すと

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

であることが分かります．一般に n 次の置換 $\sigma \in S_n$ は $\{1, 2, \cdots, n\}$ から $\{1, 2, \cdots, n\}$ への全単射ですから，その逆写像

$$\sigma^{-1}:\ \{1, 2, \cdots, n\} \longrightarrow \{1, 2, \cdots, n\}$$

は置換を定めます．そして

$$\sigma \cdot \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \cdot \sigma = \mathrm{id}$$

が成立します．特に

$$\varepsilon(\sigma) \cdot \varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma \cdot \sigma^{-1}) = \varepsilon(\mathrm{id}) = 1$$

から

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) = \varepsilon(\sigma) \tag{4.20}$$

が成立します．

演習 4.17. 次の置換に対して逆置換を求めましょう．

(1) $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$　　**(2)** $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 5 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

■互換　次に単純な置換を定義します．$1 \leq i < j \leq n$ のとき $\tau = (i\ j) \in S_n$ は

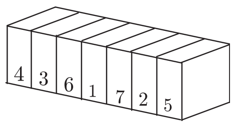
$$\tau(i) = j,\ \tau(j) = i,\ \tau(k) = k\ (k \neq i, j)$$

で定まる n 次の置換です．例えば 4 次の場合に

$$(1\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}, \quad (2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

となります．このように，2 個の番号を交換する置換のことを**互換**と呼びます．

第 1 巻から第 7 巻までの全集があるとしましょう．それが右のように乱雑に並べられているとします．これを左から第 1，第 2 巻，$\cdots$ となるように並び替えまることを考えます．そのために今の状態を



$$(4\ 3\ 6\ 1\ 7\ 2\ 5)$$

と表します．第 7 巻を左から 7 番目にするために，5 と 7 を交換します．これを

$$(4\ 3\ 6\ 1\ 7\ 2\ 5) \xrightarrow{(5\ 7)} (4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 7)$$

と表します．次に 6 を左から 6 番目にするために 2 と 6 を交換し

$$(4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 7) \xrightarrow{(2\ 6)} (4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 7)$$

と表します．この状態では 5 は左から 5 番目にありますからそのままにして，4 を左から 4 番目に移し，3 を左から 3 番目に移すと

$$(4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 7) \xrightarrow{(1\ 4)} (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7) \xrightarrow{(2\ 3)} (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$$

と左から順番通りに直ります．これを $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)$ から逆に追っていくと

$$\begin{aligned}(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7) &\xrightarrow{(2\ 3)} (1\ 3\ 2\ 4\ 5\ 6\ 7) \xrightarrow{(1\ 4)} (4\ 3\ 2\ 1\ 5\ 6\ 7)\\ &\xrightarrow{(2\ 6)} (4\ 3\ 6\ 1\ 5\ 2\ 7) \xrightarrow{(5\ 7)} (4\ 3\ 6\ 1\ 7\ 2\ 5)\end{aligned}$$

から

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 6 & 1 & 7 & 2 & 5 \end{pmatrix} = (5\ 7)\cdot(2\ 6)\cdot(1\ 4)\cdot(2\ 3)$$

であることが分かります．一般には次の定理 4.7 が成立します．

定理 4.7. $\sigma \in S_n$ は有限個の互換 $\tau_1, \cdots, \tau_\ell$ の積（合成）として

$$\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1 \tag{4.21}$$

と表せます．

演習 4.18. 次の置換を互換の積で表しましょう．

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 6 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$　**(2)** $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 6 & 1 \end{pmatrix}$

　置換の符号についてさらに言い換えを行います．そのためにはこの定理 4.7 に加えて互換の符号に関する次の定理 4.8 が必要となります．

定理 4.8. 互換 $\tau = (k\ \ell) \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\tau) = -1$$

が成立します．

Proof. **(I)** まず $\tau = \tau_0 = (1\ 2)$ の場合を考えます．反転数を考えれば明らかに

$$\varepsilon(\tau_0) = -1$$

です．または

$$\frac{\tau_0(1) - \tau_0(2)}{1-2} = \frac{2-1}{1-2} = -1$$

であることと $i \neq 1, 2$ において

$$\frac{\tau_0(1) - \tau_0(i)}{1-i} \cdot \frac{\tau_0(2) - \tau_0(i)}{2-i} = \frac{2-i}{1-i} \cdot \frac{1-i}{2-i} = 1$$

からも分かります．

(II) $\{1, 2\} \cap \{k, \ell\} =$ のとき

$$\sigma(1) = k, \sigma(2) = \ell, \sigma(k) = 1, \sigma(\ell) = 2, \sigma(i) = i\ (i \neq 1, 2, k, \ell)$$

である $\sigma \in S_n$ を定めると

$$\tau = \sigma^{-1} \tau_0 \sigma$$

が成立します．これから

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\sigma^{-1}) \varepsilon(\tau_0) \varepsilon(\sigma)$$

となります．さらに

$$\varepsilon(\sigma^{-1}) \varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1}\sigma) = \varepsilon(id) = 1$$

が分かりますから

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon(\tau_0) = -1$$

が従います．

(III) 残るは $i \neq 1, 2$ として $\tau = (1\ i), (2\ i)$ の場合ですが，これは (II) と同様に示すことができます． □

定理 4.7 の状況，すなわち (4.21) が成立するとします．すると定理 4.6 を繰り返し使うと

$$\varepsilon(\sigma) = (-1)^{\ell}$$

であることが分かります．置換 $\sigma \in S_n$ の反転数の偶奇は置換を互換の積として表したときの個数の偶奇に一致します．以上から次の定理 4.9 が従います．

定理 4.9. $\sigma \in S_n$ が互換の積として

$$\sigma = \tau_\ell \cdots \tau_1 = \tau'_{\ell'} \cdots \tau'_1$$

と 2 通りに表現されているとします．このとき ℓ と ℓ' の偶奇は一致します．

■巡回置換・隣接互換　置換について学ぶ機会はそうそうないでしょうから，いくつかの点について補足します．

まず定理 4.7 の別証明です．$k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2, \cdots, n\}$ はお互いに異なるとします．このとき

$$\sigma = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & \cdots & k_{r-1} & k_r \\ k_2 & k_3 & \cdots & k_r & k_1 \end{pmatrix}$$

を**巡回置換**と呼んで $\sigma = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_r)$ と記します．上で出てこない数は σ で動かないという約束を設けていて，この σ は

$$\sigma(k_1) = k_2, \sigma(k_2) = k_3, \cdots, \sigma(k_{r-1}) = k_r, \sigma(k_r) = k_1$$

$$\sigma(i) = i \quad (i \neq k_1, \cdots, k_r)$$

で定まる置換です．具体例として

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 9 & 1 & 5 & 6 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

を考えます．σ_1 で動かない，例えば $\sigma_1(2) = 2$ などは省略する約束を設けていますから

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 9 & 1 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

と表記しても構いません．さらに列の順番を変えても写像自体は分かりますから

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 4 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 9\ 7\ 4)$$

となります．これは

$$1 \xrightarrow{\sigma_1} 3 \xrightarrow{\sigma_1} 9 \xrightarrow{\sigma_1} 7 \xrightarrow{\sigma_1} 4 \xrightarrow{\sigma_1} 1$$

と 1 から始めて σ_1 で写していけば 1 に戻りますが，それが巡回置換の意味です．

定理 4.10. 任意の $\sigma \in S_n$ は巡回置換の積で表せます．

Proof.

$$\{\sigma^0(1) = 1,\ \sigma(1),\ \sigma^2(1), \cdots\} \subset \{1, 2, \cdots, n\}$$

とすると

$$\sigma^i(1) = \sigma^j(1), \quad 0 \leq i < j$$

を満たす i, j が存在します．この性質を満たす最小の j を j_0 とすると、対応する i は $i = 0$ となります．実際 $i > 0$ とすると

$$1 = \sigma^0(1) = \sigma^{j-i}(1)$$

において $j - i < j$ から j の最小性に矛盾します．この $j = j_0$ を r とすると

$$1,\ \sigma(1),\ \sigma^2(1),\ \sigma^3(1),\ \cdots, \sigma^{r-1}(1)$$

はすべて異なる。さらに、ここに含まれない数字で最小のものを k とするとき、同じプロセスを繰り返すことになります． □

ここで述べた証明を具体的に説明してみましょう．

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

を考えます．1 から始めて

$$1 \xrightarrow{\sigma} 3 \xrightarrow{\sigma} 9 \xrightarrow{\sigma} 7 \xrightarrow{\sigma} 4 \xrightarrow{\sigma} 1$$

と σ で動かしていくと 1 に戻ります．さらにここに現れていない数で最小である 2 から始めて

$$2 \xrightarrow{\sigma} 6 \xrightarrow{\sigma} 5 \xrightarrow{\sigma} 2$$

と σ で動かすと 2 に戻ります．今まで現れていない 8 は

$$8 \xrightarrow{\sigma} 8$$

とそれ自身に写ります．このことから

$$\sigma = (1\ 3\ 9\ 7\ 4) \cdot (2\ 6\ 5)$$

と σ は巡回置換の積で表せることが分かります（各 i を両辺の写像によって写すとどうなるか調べてみましょう）．

巡回置換は互換の積で表せます。具体的には $k_1, \cdots, k_r \in \{1, 2 \cdots, n\}$ がお互いに異なるとするとき

$$(k_1\ k_2\ \cdots\ k_r) = (k_1\ k_r)(k_1\ k_{r-1}) \cdots (k_1\ k_2) \tag{4.22}$$

が成立します．実際，帰納的に

$$(k_1\ k_r)(k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}) = (k_1\ k_2\ \cdots\ k_{r-1}\ k_r)$$

を用います．また $k_1, \cdots, k_r$ のそれぞれが (4.22) の両辺の写像で写る像がどうなるか調べてみましょう．

このことから例えば

$$(1\ 3\ 9\ 7\ 4) = (1\ 4)(1\ 7)(1\ 9)(1\ 3),\ (2\ 6\ 5) = (2\ 5)(2\ 6)$$

が従います．よって

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 6 & 9 & 1 & 2 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{pmatrix} = (1\ 4)(1\ 7)(1\ 9)(1\ 3)(2\ 5)(2\ 6)$$

と σ が互換の積として表されます．このように 4.7 が定理 4.10 と公式 (4.22) によって導かれます．

演習 4.19. 次の置換を巡回置換で表して，さらに互換の積で表しましょう．

(1) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 2 & 8 & 5 & 1 & 3 & 9 & 6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

(2) $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 2 & 9 & 7 & 1 & 4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$

次に互換の符号が -1 であることを示す定理 4.8 の別の証明を与えましょう．$i \in \{1, \cdots, n-1\}$ のとき互換

$$s_i = (i\ i+1) \in S_n$$

を**隣接互換**と呼びます．このとき

$$\varepsilon(\tau_i) = -1$$

は反転数が 1 ですから簡単に示せます．実はすべての互換は隣接互換を用いて具体的に表すことができます．例えば

$$(3\ 4)(4\ 5)(5\ 6)(4\ 5)(3\ 4) = (3\ 6)$$

が成立します．これは各 i の両辺による像を計算すれば示すことができます．また

$$(3,4,5,6) \mapsto (4,3,5,6) \mapsto (4,5,3,6) \mapsto (4,5,6,3) \mapsto (4,6,5,3) \mapsto (6,4,5,3)$$

と隣どうし交換していって 3 と 6 を交換することに対応します．一般には $i<j$ であるとき

$$(i\ i+1)(i+1\ i+2)\cdots(j-1\ j)(j-2\ j-1)\cdots(i\ i+1) = (i\ j)$$

と $\tau=(i\ j)$ は $2(j-1)+1$ この隣接互換の積で表せます．このことから

$$\varepsilon(\tau) = (-1)^{2(j-i)+1} = -1$$

であることが示せます．

4.3.2 行列式の定義

■列による定義 n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ を考えます．A の (i,j) 成分，すなわち i 行 j 列を a_{ij} とするとき A の行列式を

$$\det(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} \tag{4.23}$$

によって定義します．ここで S_n は $n!$ 個の要素からなる集合ですから $n!$ 項の和になります．また 96 ページの (4.14) によってこの定義は今までの 3 次の行列式の定義と一致します．

具体的に $n=4$ の場合を考えると $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}$ に対応する項は $\varepsilon(\sigma)=-1$ ですから

$$-a_{41}a_{12}a_{23}a_{34}$$

であることが分かります．

演習 4.20. この状況で次の σ に対応する項を求めましょう．
(1) $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\3&1&4&2\end{pmatrix}$ **(2)** $\sigma = \begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&4&1&3\end{pmatrix}$

今後、具体的には 4 次の場合に詳しく調べていきます。そのために 4 次正方行列 $A=(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})$ の場合を考えると

$$\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d}) = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)} \tag{4.24}$$

と表現されることに注意しましょう．

■行による定義・転置行列の行列式　(4.23) で与えた行列式の定義では $\sigma \in S_n$ が与えられたときに 1 列に対して $\sigma(1)$ 行，2 列に対して $\sigma(2)$ 行，3 列に対して $\sigma(3)$ 行という形で行を選びます．実は，行と列の役割を交換した形でも表現できます．

上で考えた $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ に対応する項について考えますが，その前に $\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ であることに注意しましょう．(4.23) において σ に対応する項は

$$\begin{aligned}
\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}a_{\sigma(3)3}a_{\sigma(4)4} &= -a_{41}a_{12}a_{23}a_{34} \\
&= -a_{12}a_{23}a_{34}a_{41} \\
&= \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)}a_{2\sigma^{-1}(2)}a_{3\sigma^{-1}(3)}a_{4\sigma^{-1}(4)}
\end{aligned}$$

となります．ここで (4.20) で示した $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ であることを用いています．

一般には n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ と $\sigma \in S_n$ に対して

$$\varepsilon(\sigma) \cdot a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdots a_{\sigma(n)n} = \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)}$$

が成立します．さらに写像

$$S_n \longrightarrow S_n \quad \sigma \mapsto \sigma^{-1}$$

は全単射です．このことを用いると $\tau = \sigma^{-1}$ とすると

$$\begin{aligned}
\det(A) &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \cdot a_{1\sigma^{-1}(1)} \cdot a_{2\sigma^{-1}(2)} \cdots a_{n\sigma^{-1}(n)} \\
&= \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)}
\end{aligned}$$

となります．以上で

$$\det(A) = \sum_{\tau \in S_n} \varepsilon(\tau) \cdot a_{1\tau(1)} \cdot a_{2\tau(2)} \cdots a_{n\tau(n)} \tag{4.25}$$

を示しました．ここで $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ に対して現れる項は $\varepsilon(\tau) = -1$ から

$$-a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$$

であることに注意しましょう．4 次正方行列に対しては

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} \\ \mathbf{d} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_4} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)} \tag{4.26}$$

とも表現することができます．(4.24) と (4.26) によって

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix}$$

と転置行列の行列式が元の行列式に等しいことが分かります．より一般には $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して

$$\det({}^tA) = \det(A) \tag{4.27}$$

が成立します．実際，$A = (a_{ij})$ として，さらに $B = {}^tA$ の (i,j) 成分を b_{ij} とします．このとき $b_{ij} = a_{ji}$ が成立することに注意しましょう．すると

$$\begin{aligned} \det({}^tA) &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot b_{1\sigma(1)}b_{2\sigma(2)}\cdots b_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n} = \det(A) \end{aligned}$$

と証明できます．ここで最後に列を主とする行列式の表現 (4.23) を用いました．

■列（行）を置換したときの行列式　$A = (\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n) \in M_n(\mathbf{R})$ と $\tau \in S_n$ に対して列を並び換えた行列 $(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)})$ の行列式を考えます．

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \sum_{\tau\in S_n} \varepsilon(\tau)\cdot a_{\tau(1)\sigma(1)}a_{\tau(2)\sigma(2)}\cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

が成立します．ここで，最後の式の項

$$\varepsilon(\tau)\cdot a_{\tau(1)\sigma(1)}a_{\tau(2)\sigma(2)}\cdots a_{\tau(n)\sigma(n)}$$

について詳しく見てみます．列を表している $\{\sigma(1),\sigma(2),\cdots,\sigma(n)\}$ は $\{1,2,\cdots,n\}$ を覆い尽くしています．そこで A の 1 列 $\vec{a}_1$ のどの成分（行）が現れているか考えると，$\sigma(i) = 1$ である i に対して $\tau(i)$ 行が現れています．すなわち $a_{\tau(\sigma^{-1}(1))1}$ が現れ

ています．同様に A の 2 列 $\vec{a}_2$ のどの成分が現れているかを考えると，$\sigma(i)=2$ である i に対して $\tau(i)$ 行が現れていますから，$a_{\tau(\sigma^{-1}(2))2}$ が現れています．このことから

$$a_{\tau(1)\sigma(1)}a_{\tau(2)\sigma(2)}\cdots a_{\tau(n)\sigma(n)} = a_{\tau\sigma^{-1}(1)1}a_{\tau\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n}$$

が成立します．さらに $\varepsilon(\tau)=\varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)$ であることを用いると

$$\begin{aligned}\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) &= \sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau\sigma^{-1})\varepsilon(\sigma)a_{\tau\sigma^{-1}(1)1}a_{\tau\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n}\\ &= \varepsilon(\sigma)\sum_{\tau\in S_n}\varepsilon(\tau\sigma^{-1})a_{\tau\sigma^{-1}(1)1}a_{\tau\sigma^{-1}(2)2}\cdots a_{\tau\sigma^{-1}(n)n}\end{aligned}$$

が従います．さらに $\rho=\tau\sigma^{-1}$ とするとき $\tau\in S_n$ が S_n 全体を覆うとき ρ も S_n のすべての要素を 1 回ずつ覆います．したがって

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\sum_{\rho\in S_n}\varepsilon(\rho)a_{\rho(1)1}a_{\rho(2)2}\cdots a_{\rho(n)n} = \varepsilon(\sigma)\det(A)$$

を得ます．以上で

(II)（列に関する交代性）

$$\det(\vec{a}_{\sigma(1)}\ \cdots\ \vec{a}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma)\cdot\det(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n) \tag{4.28}$$

特に $\sigma\in S_n$ が互換 $(i\ j)$ であるとき

$$\det(\cdots\ \vec{a}_i\ \cdots\ \vec{a}_j\ \cdots) = -\det(\cdots\ \vec{a}_j\ \cdots\ \vec{a}_i\ \cdots) \tag{4.29}$$

が成立することを証明しました．以上は列の置換（特に交換）に関して考えましたが，行の置換（交換）についても同様の公式

(II)（行に関する交代性）

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_{\sigma(n)}\end{vmatrix} = \varepsilon(\sigma)\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_n\end{vmatrix},\quad \text{特に } i\neq j \text{ のときに } \begin{vmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{a}_i\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_j\\ \vdots\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\vdots\\ \boldsymbol{a}_j\\ \vdots\\ \boldsymbol{a}_i\\ \vdots\end{vmatrix} \tag{4.30}$$

が成立します．

次の性質 **(IV)** は上の **(II)** にある行列式の交代性から導かれます．実際 $\vec{a}_i = \vec{a}_j = \vec{a}$ または $\boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{a}_j = \boldsymbol{a}$ とすれば以下の式が得られます．

(IV) 異なる 2 列（2 行）が等しい行列の行列式は 0 となります．

$$|\cdots\vec{a}\cdots\vec{a}\cdots| = 0, \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a} \\ \vdots \end{vmatrix} = 0$$

■三角行列の行列式・正規性　4 次の上三角行列 $A = \begin{pmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{pmatrix}$ の行列式を計算しましょう．$\sigma \in S_4$ を任意に取ります．A の 1 列から $\sigma(1)$ 行を選ぶとすると，$\sigma(1) = 1$ の場合以外は 0 になってしまいます．以下は $\sigma(1) = 1$ とします．次に A の 2 列から $\sigma(2)$ 行を選びますが，$\sigma(1) \neq \sigma(2)$ ですから，$\sigma(2) = 2$ 以外に 0 とならない選び方はありません．以下は $\sigma(1) = 1,\ \sigma(2) = 2$ とします．さらに．A の 3 列から $\sigma(3)$ 行を選ぶとすると，1 行と 2 行はすでに選ばれていますから，$\sigma(3) = 3$ 以外に 0 とならない選び方はありません．このとき自動的に $\sigma(4) = 4$ が従います．以上から

$$\begin{vmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

が成立します．次に下三角行列の行列式を考えますが，これは上三角行列に関する議論で列と行を置き換えれば，そのまま公式

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 & 0 \\ * & * & \gamma & 0 \\ * & * & * & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

を示すことができます．または転置を用いて

$$\begin{vmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ * & \beta & 0 & 0 \\ * & * & \gamma & 0 \\ * & * & * & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha & * & * & * \\ 0 & \beta & * & * \\ 0 & 0 & \gamma & * \\ 0 & 0 & 0 & \delta \end{vmatrix} = \alpha\beta\gamma\delta$$

と示すこともできます．以上の議論で次の公式が成立することが分かります．

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \alpha_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ * & \alpha_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \cdots & \alpha_n \end{vmatrix} = \alpha_1 \cdots \alpha_n$$

特に正規性

$$\det(I_n) = 1 \tag{4.31}$$

が成立します．

演習 4.21． *3.1.2* 節（*55* ページ〜）の $P_m(i,j)$, $Q_m(i,\lambda)$, $R_m(i,j,\lambda)$ の行列式を求めましょう．

4.3.3　列と行に関する性質

4.2 節で説明しましたが 3 次の行列式の基本的な性質として **(I)** 各列（行）に関する線型性，**(II)** 交代性，**(III)** 正規性がありました．これまで示していない，各列（行）に関する線型性について議論します．ここでの議論は 3 次の場合と同じものです．

補助定理 4.3．（列の場合）$F:\ \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$

$$\vec{x} \mapsto F(\vec{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$$

は $F(\lambda\vec{x} + \mu\vec{y}) = \lambda F(\vec{x}) + \mu F(\vec{y})$ を満たします．

補助定理 4.4.（行の場合）　$F:\ (\mathbf{R}^n)^* \longrightarrow \mathbf{R} \quad \boldsymbol{x} \mapsto F(\boldsymbol{x}) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ は $F(\lambda\boldsymbol{x} + \mu\boldsymbol{y}) = \lambda F(\boldsymbol{x}) + \mu F(\boldsymbol{y})$ を満たします.

この補助定理 4.3 と補助定理 4.4 の証明は 3 変数の場合の補助定理 4.2 とまったく同じですので省略します.

(I) 行と列に関する線型性　行列式の各列，各行に関して線型性が成立します. すなわち，j 列の（i 行の）足し算とスカラー倍と行列式の操作は交換します.

$$|\cdots \lambda\vec{b}_j + \mu\vec{c}_j\ \ \cdots| = \lambda\cdot|\cdots\vec{b}_j\ \ \cdots| + \mu\cdot|\cdots\vec{c}_j\ \ \cdots|$$

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ \lambda\boldsymbol{b}_i + \mu\boldsymbol{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix} = \lambda\begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{b}_i \\ \vdots \end{vmatrix} + \mu\begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{c}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

次の性質 **(V)** は性質 **(I)** と **(IV)** から得られます.

(V)　$i \neq j$ のとき i 列（i 行）の λ 倍を j 列（j 行）に加えても行列式の値は変わりません.

$$|\cdots\vec{a}_i\cdots\vec{a}_j\cdots| = |\cdots\vec{a}_i\cdots\vec{a}_j + \lambda\vec{a}_i\cdots|, \qquad \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_j + \lambda\boldsymbol{a}_i \\ \vdots \end{vmatrix}$$

行列式の値を求めるときの具体的な計算は，この **(V)** と交代性 **(II)** などを組み合

わせて三角行列に行基本変形していくことで行います．

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 2 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 2 & -4 & -6 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & -8 & -9 & 15 \\ 0 & -12 & -10 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 26 & 65 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & -7 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 15 & 47 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{247}{15} \end{vmatrix} = 247$$

と求まります．実際，最初の等号のところで 1 行と 3 行を交換して，次の等号において 1 行の (-2) 倍を 2 行と 4 行に加えています．

演習 4.22. 次の行列式を計算しましょう．

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{vmatrix}$ **(2)** $\begin{vmatrix} 7 & 13 & 10 & 6 \\ 4 & 10 & 6 & 3 \\ 8 & 12 & 11 & 7 \\ 19 & 35 & 27 & 16 \end{vmatrix}$ **(3)** $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 15 & 27 & 2 & 14 \\ 33 & 39 & 8 & 38 \\ 16 & 19 & 3 & 17 \end{vmatrix}$ **(4)** $\begin{vmatrix} -8 & -10 & 7 & -9 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ -9 & -9 & 8 & -9 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$

4.3.4　行列の積の行列式

(VI) 行列の積と行列式　行列の積と行列式は交換します．すなわち，n 次正方行列 A と B に対して

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{4.32}$$

が成立します．

このことを証明するために次の定理 4.11 を証明します．

定理 4.11.（行列式の普遍性）$\mathbf{R}^n$ の n 個の直積から実数の値を取る写像

$$F\colon\ \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

が次の性質 **(I)** と **(II)** を満たすとします.
(I)（多重線型性）

$$F(\cdots, \lambda\vec{x} + \mu\vec{y}, \cdots) = \lambda F(\cdots, \vec{x}, \cdots) + \mu F(\cdots, \vec{y}, \cdots)$$

(II)（交代性）$i \neq j$ において

$$F(\cdots, \vec{a}_i, \cdots, \vec{a}_j, \cdots) = -F(\cdots, \vec{a}_j, \cdots, \vec{a}_i, \cdots)$$

このとき

$$F(\vec{a}_1, \cdots, \vec{a}_n) = \det(\vec{a}_1 \ \cdots \ \vec{a}_n) \cdot F(\vec{e}_1, \cdots, \vec{e}_n)$$

が成立します.

Proof. $n = 4$ の場合に証明します．**(II)** において $\vec{a}_i = \vec{a}_j = \vec{a}$ とすれば

$$F(\cdots, \vec{a}, \cdots, \vec{a}, \cdots) = 0 \tag{4.33}$$

が従います．$F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d})$ において

$$\vec{a} = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 + a_4\vec{e}_4$$

などを代入すると

$$F(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}) = \sum_{1 \leq i,j,k,\ell \leq 4} a_i b_j c_k d_\ell F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k . \vec{e}_\ell)$$

が成立します．この和は 4^4 項からなりますが，(4.33) によると

$$\{i, j, k, \ell\} = \{1, 2, 3, 4\}$$

となる場合以外は 0 となります．よって以下では i, j, k, ℓ が互いに異なる

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ i & j & k & \ell \end{pmatrix}$$

の場合を考えます．交代性 **(II)** を用いると

$$F(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k . \vec{e}_\ell) = \varepsilon(\sigma) \cdot F(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$$

が従います．このことから

$$\begin{aligned}F(\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}) &= \sum_{\sigma\in S_n} a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)}\cdot\varepsilon(\sigma)F(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)\\ &= F(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)\sum_{\sigma\in S_n}\varepsilon(\sigma)\cdot a_{\sigma(1)}b_{\sigma(2)}c_{\sigma(3)}d_{\sigma(4)}\\ &= F(\vec{e}_1,\vec{e}_2,\vec{e}_3,\vec{e}_4)\det(\vec{a}\ \vec{b}\ \vec{c}\ \vec{d})\end{aligned}$$

が従います． □

■行列の積と行列式　$A,\ B\in M_n(\mathbf{R})$ とします．このとき

$$F:\mathbf{R}^n\times\cdots\times\mathbf{R}^n\longrightarrow\mathbf{R}$$

を定義式

$$F(\vec{b}_n,\cdots,\vec{b}_n) := \det(A\vec{b}_n\ \cdots\ A\vec{b}_n)$$

によって定めます．このとき

$$\begin{aligned}F(\cdots,\lambda\vec{x}+\mu\vec{y},\cdots) &= |\cdots\ A(\lambda\vec{x}+\mu\vec{y})\ \cdots| = |\cdots\ \lambda A\vec{x}+\mu A\vec{y}\ \cdots|\\ &= \lambda|\cdots\ A\vec{x}\ \cdots| + \mu|\cdots\ A\vec{y}\ \cdots|\\ &= \lambda\cdot F(\cdots,\vec{x},\cdots)+\mu\cdot F(\cdots,\vec{y},\cdots)\end{aligned}$$

と行列式の普遍性の **(I)** が成立します．また $i<j$ のとき

$$\begin{aligned}F(\cdots,\vec{b}_i,\cdots,\vec{b}_j,\cdots) &= \left|\cdots\ A\vec{b}_i\ \cdots\ A\vec{b}_j\ \cdots\right| = -\left|\cdots\ A\vec{b}_j\ \cdots\ A\vec{b}_i\ \cdots\right|\\ &= -F(\cdots,\vec{b}_j,\cdots,\vec{b}_i.\cdots)\end{aligned}$$

から行列式の普遍性の **(II)** も成立します．このことから定理 4.11 を用いると

$$F(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_n) = F(\vec{e}_1,\cdots,\vec{e}_n)\cdot\det(\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_n)$$

から

$$\left|A\vec{b}_1\ \cdots\ A\vec{b}_n\right| = |\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n|\cdot\left|\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_n\right|,\quad \text{すなわち } |AB| = |A|\cdot|B|$$

が従います．まとめると次の定理 4.12 を示しました．

定理 4.12. $A,B\in M_n(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$\det(AB) = \det(A)\cdot\det(B) \tag{4.34}$$

が成立します．

■**行列式の普遍性の応用**　$A \in M_n(\mathbf{R})$ と $B \in M_m(\mathbf{R})$，$C \in M_{n,m}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right) = \det(A)\cdot\det(B) \tag{4.35}$$

を証明しましょう．そのために

$$F\colon\ \mathbf{R}^n \times \cdots \times \mathbf{R}^n \longrightarrow \mathbf{R}$$

を

$$F(\vec{a}_1,\cdots,\vec{a}_n) := \det\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array}\right)$$

によって定義すると，定理 4.11 の普遍性 **(I)** と **(II)** を満たします．よって

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array}\right) &= \det(\vec{a}_1\ \cdots\ \vec{a}_n)\cdot\det\left(\begin{array}{ccc|c} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_n & C \\ \hline & O_{m,n} & & B \end{array}\right)\\ &= \det(A)\cdot\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right)\end{aligned}$$

が従います．

さらに $1 \leq i \leq n$ を満たす i 列 $\left(\begin{array}{c} \vec{e}_i \\ \hline \vec{0} \end{array}\right)$ を用いて列基本変形をすると

$$\det\left(\begin{array}{c|c} I_n & C \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right) = \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,m} \\ \hline O_{m,n} & B \end{array}\right)$$

となります．ここで

$$G\colon\ \mathbf{R}^m \times \cdots \times \mathbf{R}^m \longrightarrow \mathbf{R}$$

を

$$G(\vec{b}_1,\cdots,\vec{b}_m) := \det\left(\begin{array}{c|ccc} I_n & & O_{n,m} & \\ \hline O_{m,n} & \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_m \end{array}\right)$$

によって定義すると G は定理 4.11 の普遍性 **(I)** と **(II)** を満たします．よって

$$\begin{aligned}\det\left(\begin{array}{c|ccc} I_n & & O_{n,m} & \\ \hline O_{m,n} & \vec{b}_1 & \cdots & \vec{b}_m \end{array}\right) &= \det\left(\begin{array}{c|ccc} I_n & & O_{n,m} & \\ \hline O_{m,n} & \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_m \end{array}\right)\cdot\det(\vec{b}_1\ \cdots\ \vec{b}_m)\\ &= \det\left(\begin{array}{c|c} I_n & O_{n,m} \\ \hline O_{m,n} & I_m \end{array}\right)\cdot\det(B)\\ &= \det(I_{n+m})\cdot\det(B) = \det(B)\end{aligned}$$

となります．以上から (4.35) が証明されました．

特に $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & * & \cdots & * \\ \hline 0 & & & \\ \vdots & & B & \\ 0 & & & \end{array}\right) = \det(B) \tag{4.36}$$

が成立します．この (4.36) は，余因子展開，クラメールの公式を示すために用いる基本的な公式です．

以上と同様に $A \in M_n(\mathbf{R})$ と $B \in M_m(\mathbf{R})$，$C \in M_{m.n}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|c} A & O_{n,m} \\ \hline C & B \end{array}\right) = \det(A) \cdot \det(B) \tag{4.37}$$

が成立します．このことから $B \in M_{n-1}(\mathbf{R})$ に対して

$$\det\left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & B & \end{array}\right) = \det(B) \tag{4.38}$$

が成立します．

4.3.5　余因子展開

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ を $A = (a_{ij})$ と成分表示します．i 行 j 列を除いた $(n-1)$ 次正方行列 A_{ij} を用いて A の (i,j) **余因子** (*cofactor*) を

$$\tilde{A}_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij})$$

と定義します．例えば

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix} \tag{4.39}$$

に対して

$$A_{23} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_3 & b_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & d_4 \end{pmatrix}, \quad A_{14} = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 \end{pmatrix}$$

となります．(4.39) の A に対する展開公式を考えてみます．

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_1 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_2 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_3 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_4 \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 1 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \begin{vmatrix} 1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} 1 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&\quad + a_3 \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} 1 & b_4 & c_4 & d_4 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

が従います．さらに公式 (4.38) を用いると

$$\begin{aligned}
\det(A) &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - a_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= a_1 \det(A_{11}) - a_2 \det(A_{21}) + a_2 \det(A_{31}) - a_4 \det(A_{41}) \\
&= a_1 \tilde{A}_{11} + a_2 \tilde{A}_{21} + a_3 \tilde{A}_{31} + a_4 \tilde{A}_{41}
\end{aligned}$$

が従います．ここで

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & b_3 & c_3 & d_3 \\ 0 & b_1 & c_1 & d_1 \\ 0 & b_2 & c_2 & d_2 \\ 0 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}$$

と行の交換を繰り返していることに注意しましょう．一般には n 次の行列式において

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1} \\ \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_{j+1} \\ \vdots \end{vmatrix} = (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_j \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{j-1} \\ \boldsymbol{a}_{j+1} \\ \vdots \end{vmatrix}$$

が成立することに注意しましょう．また途中で公式 (4.36) を用いて 4 次の行列式を 3 次の行列式にしています．

次に 2 列の展開を試みましょう．

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \begin{vmatrix} a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_2 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - b_3 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + b_4 \begin{vmatrix} a_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= -b_1 \det(A_{12}) + b_2 \det(A_{22}) - b_3 \det(A_{32}) + b_4 \det(A_{42}) \\
&= b_1 \tilde{A}_{12} + b_2 \tilde{A}_{22} + b_3 \tilde{A}_{32} + b_4 \tilde{A}_{42}
\end{aligned}$$

となります．さらに 3 列と 4 列については

$$\begin{aligned}
\det(A) &= c_1 \det(A_{13}) - c_2 \det(A_{23}) + c_3 \det(A_{33}) - c_4 \det(A_{43}) &\quad (4.40) \\
&= c_1 \tilde{A}_{13} + c_2 \tilde{A}_{23} + c_3 \tilde{A}_{33} + b_4 \tilde{A}_{43} &\quad (4.41)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\det(A) &= -d_1 \det(A_{14}) + d_2 \det(A_{24}) - d_3 \det(A_{34}) + d_4 \det(A_{44}) &\quad (4.42) \\
&= d_1 \tilde{A}_{14} + d_2 \tilde{A}_{24} + d_3 \tilde{A}_{34} + d_4 \tilde{A}_{44} &\quad (4.43)
\end{aligned}$$

が成立します．

演習 4.23. 上で与えた 3 列と 4 列の展開を証明しましょう．ここで

$$\begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} & \vec{d} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{c} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{d} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \vec{d} & \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \end{vmatrix} \qquad (4.44)$$

が成立することを示しましょう．

一般には次の定理 4.13 で説明する j 列に関する余因子展開が成立します．

定理 4.13. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して j 列に関する余因子展開

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{1+j} a_{1j} \det(A_{1j}) + \cdots + (-1)^{n+j} a_{nj} \det(A_{nj}) \\ &= a_{1j}\tilde{A}_{1j} + a_{2j}\tilde{A}_{2j} + \cdots + a_{ij}\tilde{A}_{ij} + \cdots + a_{nj}\tilde{A}_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}\end{aligned}$$

が成立します.

これまで列に関する余因子展開について説明してきました．次に行に関する余因子展開を説明します.

定理 4.14. $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ に対して i 行に関する余因子展開

$$\begin{aligned}\det(A) &= (-1)^{i+1} a_{i1} \det(A_{i1}) + \cdots + (-1)^{i+n} a_{in} \det(A_{in}) \\ &= a_{i1}\tilde{A}_{i1} + a_{i2}\tilde{A}_{i2} + \cdots + a_{ij}\tilde{A}_{ij} + \cdots + a_{in}\tilde{A}_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\tilde{A}_{ij}\end{aligned}$$

が成立します.

Proof.

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_i \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\boldsymbol{e}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{e}_j \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} a_{ij} \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix}$$

となります．ここで最左辺の和の中にある行列式において j 列を隣接する列の交換を

繰り返して 1 列に移動させます．すなわち

$$\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_j \\ \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_{i-1} \\ \boldsymbol{a}_{i+1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccccccc} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{j-1} \left|\begin{array}{c|ccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline a_{1j} & a_{11} & \cdots & a_{1j-1} & a_{1j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i-1,j} & a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ \hline a_{i+1,j} & a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{array}\right|$$

$$= (-1)^{j-1} \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hline * & & & \\ \vdots & & A_{ij} & \\ * & & & \end{array}\right| = (-1)^{j-1} \det(A_{ij})$$

から

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (-1)^{i-1+j-1} \det(A_{ij}) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \tilde{A}_{ij}$$

が従います（上で $a_{i,j}$ と行番号と列番号を区別するために間にカンマを入れています）． □

4.3.6　クラメールの公式・行列の正則性と行列式

n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して，$\tilde{A}$ を i 行 j 列が (j, i) 余因子 $\tilde{A}_{ji}$ である n 次正方行列を表し，**余因子行列**と呼びます．A の余因子行列を $\mathrm{adj}(A)$ と表すこともあります．このとき次の定理 4.15 が成立します．

定理 4.15.

$$\tilde{A}A = A\tilde{A} = \det(A) \cdot I_n$$

定理 4.15 を $n=4$ の場合に証明します．$A=(a_{ij})\in M_4(\mathbf{R})$ を，簡単のため

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{pmatrix}$$

と記します．ここで 1 列を 3 列と同じにした行列の行列式を 1 行の余因子展開によって計算すると

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} c_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ c_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ c_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ c_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} \\ &= c_1 \begin{vmatrix} b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_2 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_3 & c_3 & d_3 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} + c_3 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} - c_4 \begin{vmatrix} b_1 & c_1 & d_1 \\ b_2 & c_2 & d_2 \\ b_3 & c_3 & d_3 \end{vmatrix} \\ &= c_1\tilde{A}_{11} + c_2\tilde{A}_{21} + c_3\tilde{A}_{31} + c_4\tilde{A}_{41} \end{aligned}$$

となります．ここで余因子 $\tilde{A}_{*1}$ は元の行列 A の余因子であることに注意しましょう．さらに $A=(a_{ij})$ として，得られた式を表すと

$$a_{13}\tilde{A}_{11} + a_{23}\tilde{A}_{21} + a_{33}\tilde{A}_{31} + a_{43}\tilde{A}_{41} = 0$$

すなわち

$$\sum_{i=1}^{4} a_{i3}\tilde{A}_{i1} = 0$$

となります．一般的には

$$\sum_{i=1}^{4} a_{ij}\tilde{A}_{ik} = \begin{cases} \det(A) & (j=k) \\ 0 & (j\neq k) \end{cases}$$

が成立します．これを行ベクトルと列ベクトルの積として

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{1k} & \tilde{A}_{2k} & \tilde{A}_{3k} & \tilde{A}_{4k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ a_{3j} \\ a_{4j} \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) & (j=k) \\ 0 & (j\neq k) \end{cases}$$

と表現できます．さらに，左側の行ベクトルと右側の列ベクトルを動かすと

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} \tilde{A}_{11} & \tilde{A}_{21} & \tilde{A}_{31} & \tilde{A}_{41} \\ \tilde{A}_{12} & \tilde{A}_{22} & \tilde{A}_{32} & \tilde{A}_{42} \\ \tilde{A}_{13} & \tilde{A}_{23} & \tilde{A}_{33} & \tilde{A}_{43} \\ \tilde{A}_{14} & \tilde{A}_{24} & \tilde{A}_{34} & \tilde{A}_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \det(A) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \det(A) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \det(A) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となります．以上で $\tilde{A}A = \det(A) \cdot I_4$ を証明しました．

さらに $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I_4$ を証明しましょう．$A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbf{R})$ を

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{pmatrix}$$

と表します．このとき 2 行を 4 行と同じにした行列の行列式を 2 行の余因子展開を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} \\
&= -d_1 \begin{vmatrix} a_2 & a_3 & a_4 \\ c_2 & c_3 & c_4 \\ d_2 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} + d_2 \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_4 \\ c_1 & c_3 & c_4 \\ d_1 & d_3 & d_4 \end{vmatrix} - d_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_4 \\ c_1 & c_2 & c_4 \\ d_1 & d_2 & d_4 \end{vmatrix} + d_4 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix} \\
&= d_1\tilde{A}_{21} + d_2\tilde{A}_{22} + d_3\tilde{A}_{23} + d_4\tilde{A}_{24}
\end{aligned}$$

となります．これを $A = (a_{ij})$ の表現に戻すと

$$a_{41}\tilde{A}_{21} + a_{42}\tilde{A}_{22} + a_{43}\tilde{A}_{23} + a_{44}\tilde{A}_{24} = 0$$

となります．一般には

$$\sum_{j=1}^{4} a_{ij}\tilde{A}_{kj} = \begin{cases} \det(A) & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & a_{i4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{A}_{k1} \\ \tilde{A}_{k2} \\ \tilde{A}_{k3} \\ \tilde{A}_{k4} \end{pmatrix} = \begin{cases} \det(A) & (i = k) \\ 0 & (i \neq k) \end{cases}$$

が成立します．これから $A \cdot \tilde{A} = \det(A) \cdot I_4$ が従います．以上で定理 4.15 を証明しました．

（定理 **4.15** の証明終わり）

定理 4.15 から $\det(A) \neq 0$ であるとき A は正則となり，

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \tilde{A}$$

が成立します．この公式を**クラメールの公式**と呼びます．

演習 4.24. 次の行列の逆行列をクラメールの公式で求めましょう．

(1) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$　**(2)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

逆に n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ が正則のとき

$$1 = \det(I_n) = \det(A \cdot A^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$$

から $\det(A) \neq 0$ が従います．

さらに n 次正方行列 A の**正則性**の判定に関して次の定理 4.16 が成立します．

定理 4.16. **（正則性の特徴付け）**　$A \in M_n(\mathbf{R})$ に対して次の条件はすべて同値です．

(i) $\mathrm{rank}(A) = n$

(ii) A は正則行列

(iii) $A\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0}$ $\left(\Leftrightarrow \ker(A) = \{\vec{0}\}\right)$

(iv) $\det(A) \neq 0$

Proof. **(ii)** と **(iv)** が必要十分であることは，すでに上で示しました．また

$$\textbf{(i)} \Leftrightarrow \textbf{(ii)} \Leftrightarrow \textbf{(iii)}$$

は定理 3.8（75 ページ）で証明しました． □

演習 4.25. 行列 $\begin{pmatrix} 2 & -\lambda-1 & 2-\lambda \\ 1 & -2-\lambda & -1 \\ 4-\lambda & -2-\lambda & 4-\lambda \end{pmatrix}$ が正則でないための必要十分条件を λ について求めましょう．

演習 4.26. 行列 $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$ の階数を a について場合分けをして求めましょう．

■連立 1 次方程式のクラメールの公式　n 次正方行列 $A \in M_n(\mathbf{R})$ と $\vec{b} \in \mathbf{R}^n$ が定める連立 1 次方程式

$$A\vec{x} = \vec{b} \tag{4.45}$$

を行列式を用いて解くことを考えましょう．すでに $n = 2$ の場合は 80 ページにおいて，$n = 3$ の場合は定理 4.5（94 ページ）で扱いました．

以下では

$$\det(A) \neq 0 \tag{4.46}$$

を仮定しましょう．このとき A には逆行列が存在して，連立 1 次方程式 (4.45) には一意的な解 $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$ が存在します．この解を具体的に行列式を用いて表現します．行列式 $\det(A)$ の j 列 $\vec{a}_j$ を $\vec{b}$ で置き換えた行列式を Δ_j とします．すると

$$\vec{b} = A\vec{x} = x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n$$

から

$$\begin{aligned} \Delta_j &= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{b} & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & x_1\vec{a}_1 + \cdots + x_j\vec{a}_j + \cdots + x_n\vec{a}_n & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} \\ &= x_j \begin{vmatrix} \vec{a}_1 & \cdots & \vec{a}_{j-1} & \vec{a}_j & \vec{a}_{j+1} & \cdots & \vec{a}_n \end{vmatrix} = x_j \cdot |A| \end{aligned}$$

から

$$x_j = \frac{\Delta_j}{|A|} \quad (j = 1, \cdots, n)$$

が導かれます．

演習 4.27. 次の連立 1 次方程式を解きましょう． $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$