第6章　確率空間と確率変数

6.1　確率空間とは

6.1.1　確率空間の定義

可測空間

集合 Ω が与えられているとします。このとき $\mathcal{P}_\Omega$ を Ω の**べき集合**、すなわち Ω の部分集合の全体の集合とします。$\mathcal{P}_\Omega$ の部分集合 $\mathcal{F}$ が σ 代数であるとは条件

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{6.1}$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c := \{\omega \in X;\ \omega \notin A\} \in \mathcal{F} \tag{6.2}$$

$$A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F} \tag{6.3}$$

が成立するときです。σ 代数をもつ集合 $(\Omega, \mathcal{F})$ のことを**可測空間** *(measurable space)* と呼びます。

ここで σ 代数の公理 (6.1),(6.2),(6.3) から導かれることをまとめます。

(i)　$\emptyset \in \mathcal{F}$
$\emptyset = \Omega^c$ から従います。

(ii)　$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$
$A_k = \emptyset\ (k = n+1, n+2, \cdots)$ と定めると

$$A_1 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{+\infty} A_k \in \mathcal{F}$$

であることから従います。

(iii)　$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$
これは

$$A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c \in \mathcal{F}$$

を用いて

$$A_1 \cap \cdots \cap A_n = (A_1^c \cup \cdots \cup A_n^c)^c \in \mathcal{F}$$

と示すことができます。

(iv) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$
これは

$$A_1^c, A_2^c, \cdots \in \mathcal{F}$$

から得られる

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n = \left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \right)^c \in \mathcal{F}$$

から従います。

(v) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$
これは

$$A \setminus B = A \cup B^c$$

を用いて示すことができます。

ここで記号をいくつか用意します。$A, B \in \mathcal{P}_\Omega$ とします。もし

$$A \cap B = \emptyset$$

ならば

$$A + B := A \cup B$$

と記します。さらに $A_n \in \mathcal{P}_\Omega$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

が成立するとします。このとき

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

と記します。このように記すことにより $\{A_n\}$ が互いに素 (disjoint) であることが明記されます。

測度空間・確率空間

集合 Ω が確率空間であるとは、可測空間であること、すなわち $\mathcal{P}_\Omega$ の部分集合である σ 代数 $\mathcal{F}$ が与えられていて、写像

$$P:\ \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

が条件

$$P(A) \geq 0 \quad (A \in \mathcal{F}) \tag{6.4}$$

$$P(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \tag{6.5}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{6.6}$$

を満すときです。P を**確率測度**と呼びます。

まず条件 (6.4), (6.5), (6.6) から導かれることをいくつか紹介しましょう。以下では確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で考え、$A, B \in \mathcal{F}$、$A_k \in \mathcal{F}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ とします。

(i) $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$
これは (6.5) の特別な場合と理解しましょう。

(ii) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
これは **(i)** の特別な場合です。

(iii) $P(\emptyset) = 0$
上の **(ii)** を $\Omega + \emptyset = \Omega$ に用いて

$$P(\Omega) = P(\Omega + \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$$

から従います。

(iv) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

$$A \cap (B \setminus A) = \emptyset$$
$$B = A \cup (B \setminus A)$$

から

$$P(B) = P(A + (B \setminus A)) = P(A) + P(B \setminus A) \geq P(A)$$

を得ます。

(v) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$
これは

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \cdots$$
$$A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \cdots + (A_n \setminus A_{n-1})$$

から従う

$$\begin{aligned} P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) &= P(A_1 + \sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n+1} \setminus A_n) = P(A_1) + \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= P(A_1) + \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} P(A_{n+1} \setminus A_n) = \lim_{N\to+\infty} P(A_N) \end{aligned}$$

から分ります。

演習 6.1. $\{A_n\}_{n=1}^{+\infty}$ が $\mathcal{F}$ の単調減少族とします。すなわち

$$A_1 \supset A_2 \supset \cdots$$

が成立するとします。このとき

$$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

が成立することを示してください。

注意 6.1. 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と

$$\mu: \mathcal{F} \longrightarrow \bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

が条件

$$\mu(A) \geq 0 \quad (A \in \mathcal{F})$$
$$\mu\left(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mu(A_n)$$

を満すとき、$(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を測度空間といいます。確率空間は全測度が *1* の測度空間であると考えることができます。上で説明した確率空間の性質は測度空間に対して成立します（*(iii)* は有限の測度の集合を用いて示すことができます)。演習 *6.1* も測度空間に対して成立します。

σ 代数（続論）

集合 Ω とそのべき集合、すなわち Ω の部分集合の全体がなす集合 $\mathcal{P}_\Omega$ を考えます。さらに

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$$

である $\mathcal{A}$ を取ります。このとき σ 代数 $\mathcal{F}$ で

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{A}, \quad \mathcal{G} \text{ は } \sigma \text{ 代数} \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$$

を満すものが唯一つ存在します。言い換えると $\mathcal{A}$ を含む σ 代数で最小のものが唯一つ存在します。これを

$$\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{A}]$$

と記し、$\mathcal{A}$ が生成する σ 代数と呼びます。

実際、

$$\sigma[\mathcal{A}] = \bigcap_{\mathcal{G} \supset \mathcal{A},\ \mathcal{G}:\sigma \text{ 代数}} \mathcal{G}$$

と定義すればよいことが分ります。右辺の $\mathcal{G}$ として $\mathcal{P}_\Omega$ が $\mathcal{G} \supset \mathcal{A}$ を満す σ 代数としてとることができることに注意しましょう。

演習 6.2. $\mathcal{A}_\lambda$ が σ 代数であるとします $(\lambda \in \Lambda)$。このとき

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} \mathcal{A}_\lambda$$

が σ 代数となることを示してください。

演習 6.3. 条件

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$$

から

$$\sigma[\mathcal{A}_1] \subset \sigma[\mathcal{A}_2]$$

を導いてください。

演習 6.4. $\mathcal{G}$ が σ 代数であるならば

$$\sigma[\mathcal{G}] = \mathcal{G}$$

が成立することを示してください。

例 6.1. $\mathcal{O}$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合全体とします（これを $\mathbb{R}^n$ の**位相 (topology)** と呼びます）。このとき

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma[\mathcal{O}]$$

を $\mathbb{R}^n$ の Borel 集合族と呼びます。

特に $n = 1$ の場合は

$$\mathcal{A}_1 = \{I;\ I \text{ は開区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \{I;\ I \text{ は有界開区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_3 = \{I;\ I \text{ は閉区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_4 = \{I;\ I \text{ は有界閉区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_5 = \{I;\ I \text{ は区間 }\}$$

$$\mathcal{A}_6 = \{(a, b];\ -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$$

の何れも $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ を生成します。$\mathcal{A}_6$ においては、$(a, +\infty]$ を $(a, +\infty)$ と見倣してください。

演習 6.5. 次のコラムを参考にして、

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \subset \sigma[\mathcal{A}_1]$$

を導いて

$$\sigma[\mathcal{A}_1] = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

を示してください。

コラム –数直線 $\mathbb{R}$ の第二加算性

数直線 $\mathbb{R}$ には加算個の開集合族 $\{U_n\}_{n=1}^{+\infty}$ が存在して、任意の開集合 I が

$$I = \bigcup_{j=1}^{+\infty} U_{n_j}$$

と部分列を用いて表示できます。これは次のように示すことができます。I の任意の点 $x \in I$ に対して、ある正数 $\delta > 0$ が存在して

$$(x-\delta, x+\delta) \subset I$$

が成立します。このとき $|x-x_0| < \frac{\delta}{2}$ を満すように $x_0 \in \mathbb{Q}$ を取ります。そして

$$|x-x_0| < r < \frac{\delta}{2}$$

を満す $r \in \mathbb{Q}$ を取ると

$$x \in (x_0-r, x_0+r) \subset (x-\delta, x+\delta) \subset I$$

が従います。中心が有理数で半径が正の有理数である開区間は加算個であることを用いれば、証明が終ります。

例 6.2. $\Omega_1,\ \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ を集合とします。また $\mathcal{F}_j$ を Ω_j の σ 代数とします。このとき

$$\mathcal{A} = \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n;\ B_j \in \mathcal{F}_j\ (j=1,2,\cdots,n)\}$$

が生成する σ 代数を

$$\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n$$

と記して積 σ 代数と呼びます。特に

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$$

が成立することに注意しましょう。

演習 6.6. $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$ 中

$$\mathcal{A}_1 = \{I_1 \times I_2; I_1, I_2 \text{は開区間}\}$$

と定めます。

$$\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \subset \sigma[\mathcal{A}_1]$$

を示して

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$$

を導いてください。

6.2　確率変数・可測写像

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えます。

$$X:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

が**確率変数**であるとは、任意の $B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して

$$X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}$$

が成立するときです。この条件は、以下に一般的に示すように、

$$X^{-1}(I) \in \mathcal{F} \quad (I \in \mathcal{A}_j)$$

が成立することと必要十分です（$j = 1, 2, \cdots, 6$）。ここで $\mathcal{A}_j$ は 6.1 ページの例 6.1 にあります。

より一般には、可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ があるとき

$$f:\ \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

が**可測**であるとは、任意の $B \in \mathcal{F}_2$ に対して

$$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1;\ f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_2$$

が成立するときです。ここで可測性を調べるための必要十分条件を与えます。

定理 6.1. 可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1)$, $(\Omega_2, \mathcal{F}_2)$ の間の写像

$$f:\ \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$$

を考えます。$\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_2$ が条件

$$\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}_2$$

を満しているとします。すなわち $\mathcal{A}$ が $\mathcal{F}_2$ を生成しているとします。このとき f が可測であるのは

$$f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \quad (B \in \mathcal{A}) \tag{6.7}$$

が成立することと必要十分です。

Proof. 条件 (6.7) が十分であることを示します。

$$\mathcal{G} := \{A \in \mathcal{F}_2;\ f^{-1}(A) \in \mathcal{F}_1\} \tag{6.8}$$

とすると $\mathcal{G}$ は σ 代数であることが分ります。さらに

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_2$$

の各集合のが生成する σ 代数を考えると

$$\mathcal{F}_2 = \sigma[\mathcal{A}] \subset \sigma[\mathcal{G}] = \mathcal{G} \subset \mathcal{F}_2$$

を得ます[1]。これから

$$\mathcal{G} = \mathcal{F}_2$$

を得るので、f が可測であることが従います。 □

演習 6.7. (6.8) にある $\mathcal{G}$ が σ 代数であることを証明しましょう。

写像

$$f:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

が定義域と値域の Borel 集合族に関して可測であるとき *Borel* **写像**と呼びます。f が連続であるとき、$O \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^n}$ に対して

$$f^{-1}(O) \in \mathcal{O}_{\mathbb{R}^m} \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m}$$

が成立しますから、f は可測となります（定理 6.1）。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と

$$(S_1, \mathcal{G}_1),\ \cdots, (S_n, \mathcal{G}_n)$$

があるとします。そして写像

$$f_i:\ \Omega \longrightarrow S_i$$

が可測であるとします。このとき

$$f = (f_1, \cdots, f_n):\ \Omega \longrightarrow S_1 \times \cdots \times S_n$$

は積 σ 代数 $\mathcal{G}_1 \times \cdots \mathcal{G}_n$ に関して可測です。それは

$$\{B_1 \times \cdots \times B_n;\ B_j \in \mathcal{G}_j\ (j = 1, \cdots, n)\}$$

が積 σ 代数 $\mathcal{G}_1 \times \cdots \mathcal{G}_n$ を生成して

$$f^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n) = f_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(B_n) \in \mathcal{F}$$

となるからです（定理 6.1）。

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の n 次元ベクトル値の確率変数とは可測写像

$$\mathbf{F}:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

のことです。もし $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に $X_1,\ \cdots,\ X_n$ と n 個の確率変数があるとき、これを用いて n 次元ベクトル値の確率変数

$$\mathbf{F}:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n\ \omega \mapsto (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$$

を構成することができます。この $\mathbf{F}$ の可測性は上でより一般的に示してあります。また $\mathbf{F}$ を $(X_1, \cdots, X_n)$ の**結合変数**と呼びます。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と $(S_1, \mathcal{G}_1),\ (S_2, \mathcal{G}_2)$ があるとします。そして写像

$$f:\ \Omega \longrightarrow S_1,\ g:\ S_1 \longrightarrow S_2$$

[1] σ 代数 $\mathcal{G}$ に対して $\sigma[\mathcal{G}] = \mathcal{G}$ が成立することを用いました。演習 6.4 （149 ページ）にあります。

が可測であるとします。このとき合成写像

$$g \circ f : \ \Omega \longrightarrow S_2$$

は可測となります。それは $B \in \mathcal{G}_2$ に対して

$$(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}\left(g^{-1}(B)\right) \in \mathcal{F}$$

から分ります。
確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ の n 次元ベクトル値の確率変数

$$\mathbf{F} : \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

があるとします。これと連続写像

$$\pi_i : \ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x_1, \cdots, x_n) \mapsto x_i$$

の合成

$$f_i = \pi_i \circ \mathbf{F} : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

は可測となりますから、確率変数です。これをベクトル値の確率変数 F の**周辺確率変数**と呼びます。

6.3 確率測度の構成・拡張

6.3.1 有限加法族

集合 Ω 上の**有限加法族**とは、$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ で条件

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{6.9}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A} \tag{6.10}$$

$$A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{A} \tag{6.11}$$

が成立するときです。

演習 6.8. $\mathcal{A}$ を集合 Ω 上の有限加法族とします。このとき次の性質を示してください。
(i) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A} \ \Rightarrow \ A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{A}$

(ii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

集合上の確率測度を構成するには、まず有限加法族上で定義して、それを σ 代数上に拡張する手法をよく取ります。そのときに次の定理を用います。

定理 6.2. $\mathcal{A}$ を集合 Ω 上の有限加法族とします。$\mathcal{A}$ 上の有限加法的関数とは

$$Q:\ \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}$$

で条件

$$Q(A) \geq 0 \quad (A \in \mathcal{A}) \tag{6.12}$$

$$Q(\Omega) = 1 \tag{6.13}$$

$$A_1, A_2, \cdots, A_n \in \mathcal{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset \Rightarrow Q\left(\Sigma_{i=1}^{n} A_i\right) = \Sigma_{i=1}^{n} Q(A_i) \tag{6.14}$$

が成立するときです。さらに Q が $\mathcal{A}$ 上の完全加法的関数とは

$$A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{A},\ A_i \cap A_j = \emptyset,\ A = \sum_{j=1}^{+\infty} A_j \in \mathcal{A} \Rightarrow Q\left(\Sigma_{i=1}^{+\infty} A_i\right) = \Sigma_{i=1}^{+\infty} Q(A_i) \tag{6.15}$$

が成立するときです。このとき、確率空間 $(\Omega, \sigma[\mathcal{A}], P)$ が一意的に存在して

$$P(A) = Q(A) \quad (A \in \mathcal{A})$$

が成立します。

定理 6.2 の証明の概要

定理 6.2 の状況で考えます。まず集合 $D \subset \Omega$ に対して D の $\mathcal{A}$ 被覆とは、有限個の $A_1, \cdots, A_n$ で

$$A_i \in \mathcal{A}\ (i = 1, 2, \cdots, n), \quad D \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i$$

を満すものです。Ω の部分集合 D に対して、$\mathcal{A}$ 被覆を用いて D の**外測度**を

$$Q^0(D) = \inf_{\{A_i\}_{i=1}^{n} : \mathcal{A}\ \text{被覆}} \sum_{i=1}^{n} Q(A_i)$$

と定義します。このとき外測度 Q^0 は性質

$$Q^0(A) = Q(A) \quad (A \in \mathcal{A}) \tag{6.16}$$

$$D_1 \subset D_2 \Rightarrow Q^0(D_1) \leq Q^0(D_2) \tag{6.17}$$

$$Q^0\left(\bigcup_{k=1}^{+\infty} D_k\right) \leq \sum_{k=1}^{+\infty} Q^0(D_k) \tag{6.18}$$

を満します。ここで集合 $B \subset \Omega$ が Q^0 可測集合とは全ての $D \subset \Omega$ に対して条件

$$Q^0(D) \geq Q^0(D \cap B) + Q^0(D \cap B^c)$$

が満されるものとして定義します。

以上の状況で次の定理が成立します。

定理 6.3. **(i)** $\mathcal{B}$ を Q^0 可測集合の全体とします。このとき $\mathcal{B}$ は Ω 上の σ 代数となります。
(ii) $\mathcal{B} \supset \sigma[\mathcal{A}]$ が成立します。
(iii) $(\Omega, \mathcal{B}, Q^0)$ は確率空間となります。
(iv) $(\Omega, \sigma[\mathcal{A}], Q^0)$ は確率空間となります。

6.3.2 Lebesgue-Stieltjes 測度・確率分布関数

定理 6.2 を用いて Lebesgue-Stiltjes 測度を構成します。

その内容に入る前に、**確率分布関数**について説明します。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 X を考えます。このとき X の分布関数を

$$F(x) = P\left(X^{-1}\left((-\infty, x]\right)\right) = P\left(\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) \leq x\}\right)$$

として定義します。$F(x)$ は条件

$$F \text{ は右連続} \tag{6.19}$$

$$F \text{ は単調増加} \tag{6.20}$$

$$\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1, \quad \lim_{x \to -\infty} F(x) = 0 \tag{6.21}$$

を満たします。

逆に、$\mathbb{R}$ 上の右連続な単調増加関数

$$F:\ \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$$

が条件 (6.21) を満すときに $\mathbb{R}$ の Borel 集合族 $\mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ 上の確率測度 P が唯一つ存在して

$$P((-\infty, x]) = F(x)$$

を満たします。その構成は以下のように行います。まず

$$\begin{aligned}\mathcal{C} \quad := \quad & \{(-\infty, b];\ b \in \mathbb{R}, b \text{ は } F \text{ の連続点}\} \\ & \cup \{(a, b];\ a, b \in \mathbb{R}, a < b, b \text{ は } F \text{ の連続点}\} \cup \{(a, +\infty);\ a \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

を用いて有限加法族

$$\mathcal{A} = \left\{\sum_{i=1}^{n} A_i; A_i \in \mathcal{C}\right\}$$

と定めます。すると

$$\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

が成立します。このことを示すには、F の不連続点が高々加算個であることを示して用います[2]。

[2] これはもっと説明が必要です。

　さらに

$$-\infty \leq a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \cdots \leq a_\ell < b_\ell \leq +\infty$$

を満す

$$A = \sum_{i=1}^{\ell} (a_i, b_i] \in \mathcal{A}$$

を考えます。ここで b_i は、F の連続点とします。この A に対して

$$Q(A) = \sum_{i=1}^{\ell} (F(b_i) - F(a_i))$$

を定めると、拡張定理 6.2 を適用できます。実際は、拡張定理 6.2 における条件 (6.15) が満されることを示す必要がありますが、省略します。

6.3.3　積確率空間

　有限個の確率空間 $(\Omega_i, \mathcal{F}_i, P_i)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ が与えられているとします。これをもとに積空間

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$$

をもとに確率空間の構造を構成することを考えます。そのためにまず

$$\mathcal{F} := \{A_1 \times \cdots \times A_n;\ A_j \in \mathcal{F}_j (j = 1, 2, \cdots, n)\}$$

を用いて、有限加法族

$$\mathcal{A} := \{B_1 + \cdots + B_\ell; B_k \in \mathcal{F}\ (k = 1, 2, \cdots, \ell)\}$$

を定めます。このとき

$$\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{\text{有限和}} B_k;\ B_k \in \mathcal{F} \right\}$$

が成立することに注意しましょう。そして

$$B = A_1 \times \cdots \times A_n \qquad (A_j \in \mathcal{F}_j (j = 1, 2, \cdots, n))$$

に対して

$$P(B) = P(A_1) \times \cdots \times P(A_n)$$

さらに

$$B = B_1 + \cdots + B_\ell \quad (B_k \in \mathcal{F}\ (k = 1, \cdots, \ell))$$

に対して

$$P(B) = \sum_{j=1}^{\ell} P(B_j)$$

と定めます。この状況で拡張定理 6.2 が適用できて積確率空間

$$(\Omega, \mathcal{G}, P)$$

が構成できます。ここで

$$\mathcal{G} = \sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}_1 \times \cdots \times \mathcal{F}_n$$

と定義しています。

6.4 確率空間上の積分

6.4.1 可測関数の性質

これから確率空間上の積分を定義していきます。その上で必要となる可測関数の性質をまず説明していきます。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ があるとします。このとき Ω 上の可測関数について次が成立します。

定理 6.4. **(i)** f と g は可測関数とします。このとき $f \pm g$ と $f \cdot g$ は Ω 上の可測関数となります。
(ii) g は可測関数で

$$g(\omega) \neq 0 \quad (\omega \in \Omega)$$

が成立するとします。このとき $\dfrac{1}{g}$ は可測関数となります。

Proof. **(i)** 6.2 節で示しましたが、f と g の可測性から

$$(f, g):\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

が可測であることが分ります。このとき $f \cdot g$ はこの写像と連続写像

$$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$

との合成写像として可測となります。$f \pm g$ が可測となることも同様に証明できます。
(ii) g は可測写像

$$\Omega \longrightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

を定めます。この写像と連続写像

$$\mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \frac{1}{x}$$

の合成として $\frac{1}{g}$ は可測となります。 □

演習 6.9. 写像

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x \cdot y$$
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x + y$$
$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x, y) \mapsto x - y$$

がいずれも連続となることを示しましょう。

次に可測関数列の極限の可測性について考えます。

定理 6.5. 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の関数 f_n は可測とします $(n = 1, 2, \cdots)$。各点 $\omega \in \Omega$ に対して $\{f_n(\omega)\}_{n=1}^{+\infty}$ は上に有界とします。このとき

$$g = \sup_n f_n$$

は Ω 上可測です。

Proof. $\omega \in \Omega$ に対して

$$\begin{aligned} \omega \in g^{-1}((a, +\infty)) &\Leftrightarrow g(\omega) \in (a, +\infty) \\ &\Leftrightarrow a < g(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists n \ a < f_n(\omega) \\ &\Leftrightarrow \exists n \ \omega \in f_n^{-1}((a, +\infty)) \\ &\Leftrightarrow \omega \in \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}((a, +\infty)) \end{aligned}$$

から

$$g^{-1}((a, +\infty)) = \bigcup_{n=1}^{+\infty} f_n^{-1}((a, +\infty))$$

が成立することが分ります。この右辺は可測集合ですから、g が可測関数であることが分ります。 □

系 6.1. **(i)** $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とします。Ω 上の可測関数列 f_n に対して、Ω 上の関数 f が

$$f(\omega) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(\omega)$$

を満すとします。このとき f は Ω 上の可測関数となります。
(ii) Ω 上の可測関数列 $\{f_n\}$ に対して、Ω 上の関数 f が

$$f(\omega) = \lim_{n\to+\infty} f_n(\omega)$$

を満すとします。このとき f は Ω 上の可測関数となります。

Proof. **(i)** $f(\omega) = \inf_{n\geq 1}\left(\sup_{k\geq n} f_k(\omega)\right)$ に注意します。上の定理 6.5 と同等の定理が下限に対しても成立することから、**(i)** が従います。
(ii) この状況で

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = \limsup_{n\to+\infty} f_n(\omega)$$

が成立しますから、明らかです。 □

定理 6.6. $(\Omega, \mathcal{F})$ を可測空間とします。Ω 上の可測関数 f と g があるとき $\max(f,g)$ と $\min(f,g)$ は可測関数です。特に

$$f_+ := \max(f,0),\ \ f_- := -\min(f,0),\ \ |f| = f_+ + f_-$$

は可測関数となります。

Proof. 定理 6.4 と同様に証明します。そこで

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \max(x,y)$$

$$\mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad (x,y) \mapsto \min(x,y)$$

の連続性を用います。 □

6.4.2 可測関数の単関数近似

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ を考えます。Ω 上の関数 s が**単関数** *(simple function)* であるとは

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}$$

と Ω 上 s が有限個の値しか取らないときです。このとき

$$A_i = \{\omega \in \Omega; s(\omega) = \alpha_i\} = s^{-1}(\{\alpha_i\}) \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

と定めると

$$s(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(\omega)$$

が成立します。ここで χ_{A_i} は集合 A_i の**定義関数**

$$\chi_{A_i}(\omega) = \begin{cases} 1 & (\omega \in A_i) \\ 0 & (\omega \notin A_i) \end{cases}$$

を意味します。また

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega, \quad A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j)$$

が成立することに注意しましょう。この単関数 s が可測であるための必要十分条件は、全ての A_i が Ω の可測集合であること、すなわち

$$A_i \in \mathcal{F} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

が成立することです。

より一般に、可測集合 $A_1, \cdots, A_n$ と実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ に対して

$$s(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(\omega)$$

は可測な単関数となります。このことを次の定理で示します。

定理 6.7. 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ の可測集合 $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F}$ と実数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ があるとします。このとき

$$s(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}(\omega)$$

は可測な単関数となります。

Proof. 関数 $\alpha_i \chi_{A_i}$ が可測であることが A_i の可測性から従いますから、その有限和である関数 s の可測性も分ります。s が単関数であること、すなわち値が有限個の実数であることを n に関する帰納法で示します。$n-1$ の場合に成立すると仮定します。このことを用いると $s_{n-1} = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i}$ は

$$s_{n-1}(\Omega) = \{\beta_1, \cdots, \beta_\ell\}, \quad \beta_i \neq \beta_j \ (i \neq j)$$

と s_{n-1} が有限個の値をとることが分ります。このとき $B_k = s_{n-1}^{-1}(\beta_k)$ とすると

$$s_{n-1} := \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \chi_{A_i} = \sum_{k=1}^{\ell} \beta_j \chi_{B_j}$$

となり、

$$\Omega = \bigcup_{j=1}^{\ell} B_j, \quad B_i \cap B_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

が成立します。このとき $s = s_{n-1} + \alpha_n \chi_{A_n}$ が取る値は

$$\{\beta_1, \cdots, \beta_\ell, \beta_1 + \alpha_n, \cdots, \beta_\ell + \alpha_n\}$$

の部分集合ですから、s の取る値は有限個となります。以上で s が単関数であることが分ります。 □

ここで Ω 上の非負値の可測関数

$$f: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

を考えましょう。この関数 f は可測な単関数列の単調増加極限として記述されます。

定理 6.8. $(\Omega, \mathcal{F})$ は可測空間とします。Ω 上の非負値の可測関数 f に対して、単関数列 $\{\varphi_n\}$ が存在して

$$0 \leq \varphi_1 \leq \varphi_2 \leq \varphi_3 \leq \cdots$$

$$f(\omega) = \lim_{n \to +\infty} \varphi_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

が成立します。

Proof.

$$B_k^n := f^{-1}\left(\left[\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)\right) \quad (k = 1, 2, \cdots, n2^n)$$

$$B_\infty^n := f^{-1}\left([n, +\infty)\right)$$

と定めます。ここで

$$\varphi_n := \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{B_k^n} + n\chi_{B_\infty^n}$$

と定めれば、$\{\varphi_n\}$ は Ω 上の可測な単関数列で定理の条件を満たします。 □

6.4.3 積分の定義

単関数の積分

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とします。この確率空間上の非負値の可測な単関数 s を考えます。

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \cdots, \alpha_n\}, \quad \alpha_i \neq \alpha_j \ (i \neq j)$$

が成立していて、$A_i = s^{-1}(\alpha_i)$ によって

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

と表示されているとします。このとき

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} A_i, \quad A_i \cap A_j = \emptyset \ (i \neq j)$$

が成立します。ここで s の可測集合 $D \in \mathcal{F}$ 上の積分を

$$\int_D s(\omega) dP(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot P(D \cap A_i)$$

で定義します。

一般の非負値の可測関数に対して積分を定義するために次の定理 6.9 を準備とします。

定理 6.9. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間とします。そして s と t を非負値の単関数とします。
(i) $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$\Phi(A) = \int_A s(\omega) dP(\omega) \geq 0$$

と定めると

$$\Phi\left(\sum_{k=1}^{+\infty} D_k\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(D_k)$$

が $D_k \in \mathcal{F}$ $(k = 1, 2, \cdots)$ に対して成立します。従って、Φ は可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上の測度を定めます。
(iii) $A_k \in \mathcal{F}$ が

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots$$

を満すとします。このとき

$$\lim_{n \to +\infty} \Phi(A_n) = \Phi\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

が成立します。
(iii) 定理 *6.7* によって単関数であることが分っている $s + t$ に対して

$$\int_\Omega (s + t) dP = \int_\Omega s dP + \int_\Omega t dP$$

が成立します。

Proof. **(i)** まず

$$D = \sum_{k=1}^{+\infty} D_k$$

が成立するとします。このとき

$$\begin{aligned} \Phi(D) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot P(D \cap A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot P(\sum_{k=1}^{+\infty} D_k \cap A_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot \sum_{k=1}^{+\infty} P(D_k \cap A_i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot P(D_k \cap A_i) = \sum_{k=1}^{+\infty} \Phi(D_k) \end{aligned}$$

が従います。
(ii) 6.1.1 節（146 ページ〜）において、単調増加な可測集合 $\{A_n\}$ すなわち

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots$$

を満す可測集合列 $\{A_n\}$ に対して確率測度 P が

$$\lim_{n \to +\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right)$$

を満すこととを確率測度の公理 6.5 から示しました。**(ii)** はこれと全く同様に示すことができます (148 ページの注意 6.1 を参照してください)。
(iii) 非負値の可測な単関数 t が

$$t\,(\Omega) = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_m\}, \quad \gamma_j \neq \gamma_k \ (j \neq k)$$

と有限個の値をとっていて

$$t = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \chi_{C_j}$$

と $C_j = t^{-1}(\gamma_j)$ を用いて表示されているとします。このとき

$$D_{ij} = A_i \cap C_j$$

とすると

$$\int_{D_{ij}} (s+t) dP = (\alpha_i + \gamma_j)\, P(D_{ij})$$

が成立します[3]。そして

$$\int_{D_{ij}} sdP + \int_{D_{ij}} tdP = \alpha_i P(D_{ij}) + \gamma_j P(D_{ij}) = \int_{D_{ij}} (s+t) dP$$

を得ます。ここで (i) を用いると

$$\int_{\Omega} (s+t) dP = \sum_{i,j} \int_{D_{ij}} (s+t) dP = \sum_{i,j} \left(\int_{D_{ij}} sdP + \int_{D_{ij}} tdP \right) = \int_{\Omega} sdP + \int_{\Omega} tdP$$

となります。　□

演習 6.10. s を非負値の可測な単関数とします。D を可測集合とするとき $s \cdot \chi_D$ も非負値の可測な単関数であることを示してください。そして

$$\int_D s = \int_{\Omega} \chi_D \cdot s$$

が成立することを証明してください。(ヒント：s が 0 を値にとる場合とそうでない場合に分けて考えるといいでしょう。)

非負値の可測関数の積分

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の非負値の可測関数 f を考えます。このとき可測集合 $D \in \mathcal{F}$ に対して、f の D 上の積分を

$$\int_D f dP = \sup \int_D s dP$$

[3]

$$(s+t) \cdot \chi_{D_{ij}} = (\alpha_i + \gamma_j) \chi_{D_{ij}}$$

であることに注意すれば、演習 6.10 を用いれば示すことができます。

として定義します。ここで上限は、$s \leq f$ を満す非負値の可測な単関数 s 全てに対してとります。後に、定理 6.8 によって存在が保証されている単関数列による単調増加極限で積分が計算できることを示しますが、そのためにいくつかの準備を行います。

まず積分の定義から導かれることを示します。

定理 6.10. f と g は非負値の可測関数とします。また $A, B, D \in \mathcal{F}$ とします。

(i) $f \leq g \Rightarrow \int_D f \leq \int_D g$

(ii) $A \subset B \Rightarrow \int_A f \leq \int_B f$

(iii) c を非負の定数とします。このとき

$$\int_D cf = c\int_D f$$

(iv) $f(\omega) = 0 \quad (\omega \in D)$ ならば

$$\int_D f = 0$$

(v) $P(D) = 0$ ならば

$$\int_D f = 0$$

(vi) $\int_D f = \int_\Omega \chi_D f$

演習 6.11. 定理 *6.10* を証明してください。

単調収束定理

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上で定義された非負値の可測関数

$$f:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

の可測集合 D 上の積分は

$$\int_D f dP := \sup \int_D s dP$$

として定義しました。s は $s \leq f$ を満す任意の非負値の単関数です。この定義は、定理 6.10 のように単純な事実を証明するには十分ですが、より複雑なことを示すには相応しくありません。そこで、可測関数を単関数で近似することで積分を近似していくことを考えます。

定理 6.11. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の非負値の可測関数 f と $f_1, f_2, \cdots$ が条件

$$0 \leq f_1 \leq f_2 \leq \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

を満すとします。このとき

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D f_n dP = \int_D f dP$$

が従います。

Proof. Ω 上の不等式 $f_n \leq f_{n+1} \leq f$ から不等式

$$\int_D f_n dP \leq \int_D f_{n+1} dP \leq \int_D f dP$$

が従います。$\left\{\int_D f_n\right\}$ は上に有界な単調増加な数列であることが分ります。従って、収束列となることも分ります。極限は

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D f_n dP \leq \int_D f dP$$

を満たします。この逆の不等式を示すために、

$$0 \leq s \leq f$$

を満す非負値の可測な単関数 s と $0 < c < 1$ を満す実数 $c \in \mathbb{R}$ を取ります。そして可測集合

$$A_n := \{\omega \in \Omega;\ f_n(\omega) \geq cs(\omega)\}$$

を定めます。このとき

$$\int_\Omega f_n \geq \int_{A_n} f_n \geq c \int_{A_n} s$$

が成立します[4]。ここで n に関して極限をとると、$\{A_n\}$ が単調増加列で

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$$

が成立しますから、定理 6.9 を用いると

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{A_n} s = \int_\Omega s$$

を得ます。よって

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f \geq c \int_\Omega s$$

[4] 最後の不等式を示すには

$$\int_{A_n} f_n = \int_\Omega \chi_{A_n} f_n, \quad \int_{A_n} s = \int_\Omega \chi_{A_n} s$$

であること（定理 6.10(vi)）と

$$\chi_{A_n} f_n \geq \chi_{A_n} s$$

であることを用います。

を得ます。これが $0 < c < 1$ を満す任意の実数 c に対して成立することから

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f \geq \int_\Omega s$$

が従います。ここでさらに、$s \leq f$ を満す可測な非負値の単関数に関して上限をとると

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f \geq \sup\int_\Omega s = \int_\Omega f$$

が示されます。以上で定理が証明されました。 □

系 6.2. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の非負値の可測関数 f を考えます。Ω 上の可測な非負値単関数列 $\{s_n\}$ が

$$s_1 \leq s_2 \leq \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n(\omega) = f(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

を満すならば

$$\lim_{n\to+\infty}\int_D s_n = \int_D f$$

が全ての可測集合 $D \in \mathcal{F}$ に対して成立します。

系 6.3. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の非負値の可測関数 f と g を考えます。このとき、全ての可測集合 D に対して

$$\int_D (f+g)dP = \int_D fdP + \int_D gdP$$

が成立します。

Proof. 非負値の可測な単関数列 $\{s_n\}$ と $\{t_n\}$ の単調増加極限として f と g が表されているとします。このとき $f+g$ は非負値の可測な単関数列 $\{s_n+t_n\}$ の単調増加極限として表されます。このとき

$$\int_D (s_n+t_n) = \int_D s_n + \int_D t_n$$

において極限をとると

$$\int_D (f+g) = \int_D f + \int_D g$$

を得ます。 □

絶対可積分な可測関数

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可測関数 f を考えます。この f に対して、可測関数

$$f_+ = \max(f, 0), \quad f_- = -\min(f, 0)$$

を定めると f_+ と f_- は非負であり

$$f = f_+ - f_-, \quad |f| = f_+ + f_-$$

が成立します。ここで

$$\int_\Omega f_+ < +\infty,\ \int_\Omega f_- < +\infty$$

と

$$\int_\Omega |f| < +\infty$$

とは必要十分ですが、この条件が成立するとき、f は Ω 上**絶対積分可能**と呼び

$$f \in L^1(\Omega, P)$$

と記します。そして

$$\int_\Omega f dP = \int_\Omega f_+ dP - \int_\Omega f_- dP$$

と定義します。

6.4.4　積分の性質

この節では、前節において構成した積分の性質、特に積分と極限の関係について述べます。まず定理 6.11 から始めます。

定理 6.12. **（定理 6.11）**確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の非負値の可測関数 f と $f_1, f_2, \cdots$ が条件

$$0 \le f_1 \le f_2 \le \cdots$$

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(\omega) = f(\omega) \quad (\omega \in \Omega)$$

を満すとします。このとき

$$\lim_{n\to+\infty} \int_D f_n dP = \int_D f dP$$

が従います。

系 6.4. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可積分関数 $f \in L^1(\Omega, P)$ を考えます。
(i) 可測集合 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が

$$A_n \cap A_m = \emptyset \ (m \neq m), \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$$

を満すとします。このとき

$$\int_\Omega f dP = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f dP$$

が成立します。
(ii) 可測集合 $A_n \in \mathcal{F}$ $(n = 1, 2, \cdots)$ が

$$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots, \quad \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \Omega$$

を満すならば

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{A_n} f dP = \int_\Omega f dP$$

が成立します。

Proof. **(i)** まず f が非負の場合に証明します。すなわち

$$f_n := \sum_{k=1}^{n} f \cdot \chi_{A_k}$$

と定めて、定理 6.12 を適用します。
　非負値とは限らない f に対しては

$$f = f_+ - f_-$$

と正部分と負部分に分けて、それぞれに対して系が成立することを用いて証明します。
(ii) 演習とします。 □

演習 6.12. 系 *6.4* の **(ii)** を証明してください。

　極限が存在しない場合については次の不等式が成立します。

定理 6.13. **（Fatou の不等式）** 可測集合 A と非負値の可測関数列 $\{f_n\}$ に対して、不等式

$$\int_A \liminf_{n \to +\infty} f_n dP \leq \liminf_{n \to +\infty} \int_A f_n dP$$

が成立します。

Proof. 可測関数列

$$g_n(x) := \inf_{k \geq n} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$$

を定めます。このとき $\{g_n\}$ は増大列になり、

$$\liminf_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty} g_n(x)$$

が成立します。これを用いると定理 6.12 によって

$$\int_A \liminf_{n\to+\infty} f_n\,dP = \int_A \lim_{n\to+\infty} g_n\,dP = \liminf_{n\to+\infty}\int_A g_n\,dP$$

を得ます。他方 $f_n \geq g_n$ から

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_A g_n\,dP \leq \lim_{n\to+\infty}\int_A f_n\,dP$$

が成立します。 □

次に収束する可測関数列とその積分に関してより一般的な Lebesgue の収束定理 **(Lebesgue's dominated convergence Theorem)** を述べます。

定理 6.14. (Lebesgue の収束定理) Ω 上の可測関数列 $\{f_n\}$ と Ω 上の可積分関数 $g \in L^1(\Omega, P)$ が

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad (x \in \Omega)$$

を満すとします。$\{f_n\}$ が収束するならば

$$\lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,dP = \int_\Omega \lim_{n\to+\infty} f_n\,dP$$

が成立します。

Proof. 仮定 $|f_n| \leq g$ から

$$0 \leq g + f_n, \quad 0 \leq g - f_n$$

が成立します。Fatou の不等式を用いると

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty}(g+f_n)dP \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega (g+f_n)dP$$

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty}(g-f_n)dP \leq \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega (g-f_n)dP$$

が成立します。この両方の不等式の左辺は $\{f_n\}$ の極限が存在することから

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty}(g+f_n)dP = \int_\Omega (g+f)dP = \int_\Omega g + \int_\Omega f$$

$$\int_\Omega \liminf_{n\to+\infty}(g-f_n)dP = \int_\Omega (g-f)dP = \int_\Omega g - \int_\Omega f$$

となります。(ここで、最後に $|f| \leq g$ から f が可積分であることを導いて用いました。)

他方、右辺は f_n が可積分であることから

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega (g+f_n)dP = \liminf_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega g\,dP + \int_\Omega f_n\,dP\right) = \int_\Omega g\,dP + \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n\,dP$$

$$\liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega (g+f_n)dP = \liminf_{n\to+\infty}\left(\int_\Omega gdP + \int_\Omega f_n dP\right) = \int_\Omega gdP - \limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n dP$$

となります。以上をまとめると

$$\int_\Omega gdP + \int_\Omega fdP \le \int_\Omega gdP + \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n dP$$

$$\int_\Omega gdP - \int_\Omega fdP \le \int_\Omega gdP - \limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n dP$$

を導きました。これから有限の値である $\int_\Omega gdP$ を両辺から消すと

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n dP \le \int_\Omega fdP \le \liminf_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n dP$$

を得ます。 □

6.4.5 積空間上の積分・Fubini の定理

この第 6.4.5 節では、2 つの確率空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ と $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ が与えられたときに第 6.3.3 節で構成した積空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P)$ 上の積分について詳しく考察を行います。

単調族

集合 Ω の集合族 $\mathcal{N}(\subset \mathcal{P}_\Omega)$ が**単調族**であるとは

$$A_n \in \mathcal{N}\ (n=1,2,3,\cdots),\ A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{N}$$

$$A_n \in \mathcal{N}\ (n=1,2,3,\cdots),\ A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \cdots \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{N}$$

が成立するときです。

集合 Ω の集合族 $\mathcal{F}(\subset \mathcal{P}_\Omega)$ に対して

$$\tau(\mathcal{F}) := \bigcap_{\text{単調族 } \mathcal{N}\supset\mathcal{F}} \mathcal{N}$$

と定めれば、$\mathcal{F}$ を含む最小の単調族が得られます。これを $\mathcal{F}$ が生成する単調族と呼びます。

定理 6.15. $\mathcal{F}$ が有限加法族ならば

$$\sigma[\mathcal{F}] = \tau(\mathcal{F})$$

が成立します。

Fubini の定理

この第 6.4.5 節の冒頭にあるように 2 つの確率空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1, P_1)$ と $(\Omega_2, \mathcal{F}_2, P_2)$ の積空間 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P)$ を考えます。

まず $\mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ と P の構成についてもう一度見てみます。

$$\mathcal{A} := \{A_1 \times A_2;\ A_1 \in \mathcal{F}_1,\ A_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

をもとに有限加法族

$$\mathcal{A} := \{B_1 + \cdots + B_\ell;\ B_k \in \mathcal{F}\} = \left\{ \bigcup_{\text{有限個の和}} C_j \times D_j;\ C_j \in \mathcal{F}_1,\ D_j \in \mathcal{F}_2 \right\}$$

と定めます。このもとで

$$B = C_1 \times D_1 + \cdots + C_\ell \times D_\ell$$

に対して

$$P(B) = P_1(C_1) \times P_2(D_1) + \cdots + P_1(C_\ell) \times P_2(D_\ell)$$

と定めれば、拡張定理 6.2 が適用できて積確率空間

$$(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2, P)$$

を構成できます。

この状況で $E \in \mathcal{F}_1 \times \mathcal{F}_2$ が与えられているときに、$y \in \Omega_2$ に y のファイバーを

$$E_y := \{x \in \Omega_1;\ (x, y) \in E\}$$

と定めます。このとき次の定理が成立します。

定理 6.16.

$$E_y \in \mathcal{F}_2$$

が成立し、さらに

$$g(y) := P_1(E_y)$$

が $\mathcal{F}_2$ 可測であることが示されます。さらに

$$P(E) = \int_Y g(y) dP_1(y)$$

も成立します。

6.5　独立性

6.5.1　乗法系、Dynkin 族

集合 Ω を考えます。$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ が

$$A_1, A_2 \in \mathcal{A} \Rightarrow A_1 \cap A_2 \in \mathcal{A}$$

が成立するとき $\mathcal{A}$ は**乗法系**であるといいます。

他方、$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ が *Dynkin* **族**であるとは条件

$$A_n \in \mathcal{A}\ (n = 1, 2, 3, \cdots), A_i \cap A_j = \emptyset\ (i \neq j) \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A} \tag{6.22}$$

$$A, B \in \mathcal{A},\ A \subset B \Rightarrow B \setminus A \in \mathcal{A} \tag{6.23}$$

$$\Omega \in \mathcal{A} \tag{6.24}$$

が成立するときです。Dynkin 族に関する簡単な性質についてまとめましょう。

(i) $\mathcal{A}$ が σ 代数ならば Dynkin 族となります。

これは自明です。145 ページで導かれている σ 代数の性質に (6.22),(6.23),(6.24) は全て含まれています。

(ii)$\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ とします。$\mathcal{A}$ を含む最小の Dynkin 族が唯一つ存在します。

最小の Dynkin 族を

$$\delta[\mathcal{A}] = \bigcap_{\mathcal{D}:\text{Dynkin 族},\mathcal{D}\supset\mathcal{A}} \mathcal{D}$$

によって構成します。

(iii) $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega \Rightarrow \delta[\mathcal{A}] \subset \sigma[\mathcal{A}]$

$\sigma[\mathcal{A}]$ は $\mathcal{A}$ を含む Dynkin 族であることから従います。実際、**(ii)** が意味するところは $\mathcal{D}$ が

$$\mathcal{D} \supset \mathcal{A}$$

を満す Dynkin 族であるならば

$$\mathcal{D} \supset \delta[\mathcal{A}]$$

が成立することです。

命題 6.1. $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ とします。$\mathcal{A}$ が乗法系であると同時に *Dynkin* 族であるとします。このとき $\mathcal{A}$ は σ 代数となります。

Proof. 条件

$$\Omega \in \mathcal{A}$$

は Dynkin 族の定義 (6.24) から従います。また $A \in \mathcal{A}$ とすると

$$A \subset \Omega,\ \Omega \in \mathcal{A}$$

から

$$\Omega^c = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$

が Dybkin 族の性質 (6.23) から従います。最後に

$$A_n \in \mathcal{A} \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

とします。このとき

$$A_n^c \in \mathcal{A}$$

となります。ここで $\mathcal{A}$ が乗法系であることを用いると

$$B_n = A_n \cap A_1^c \cap \cdots \cap A_{n-1}^c \in \mathcal{A}$$

を得ます。すると

$$B_i \cap B_j = \emptyset (i \neq j)$$

から

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \in \mathcal{A}$$

が Dynkin 族の定義 (6.22) から従います。 □

今から次の定理を様々な形で使います。

定理 6.17. **(Dynkin 族定理)** $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega$ とします。$\mathcal{A}$ が乗法系ならば

$$\delta[\mathcal{A}] = \sigma[\mathcal{A}]$$

が成立します。

演習 6.13. 上の *Dynkin* 族定理を証明してください。

6.5.2 事象の独立性

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えます。事象 B_1 と B_2 が独立であるとは

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)$$

が成立するときです。さらに、有限個の事象 $P_1, P_2, \ldots, P_n$ が独立であるとは

$$P(B_1 \cap B_2 \cap \cdots \cap B_n) = P(B_1) \cdot P(B_2) \ldots P()B_n)$$

が成立するときです。

6.5.3　部分 σ 代数の独立性

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えます。$\mathcal{B}_i$ を $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数とします。すなわち $\mathcal{B}_i$ を

$$\mathcal{B}_i \subset \mathcal{F}$$

を満す Ω 上の σ 代数とします $(i = 1, 2, \cdots, n)$。このとき $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ が**独立** *(indendent)* であるとは

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} B_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(B_i) \quad (B_1 \in \mathcal{B}_1, \cdots, B_n \in \mathcal{B}_n) \tag{6.25}$$

が成立するときです。

独立性の判定には $\mathcal{B}_i$ を生成する乗法系 $\mathcal{A}_i$ を用いて (6.25) を判定します。

定理 6.18. $\mathcal{F}$ の部分集合 $\mathcal{A}_i$ は $\mathcal{B}_i$ を生成する乗法系とします $(i = 1, 2, \cdots, n)$。すなわち

$$\sigma[\mathcal{A}_i] = \mathcal{B}_i$$

と

$$A_i, A_i' \in \mathcal{A}_i \Rightarrow A_i \cap A_i' \in \mathcal{A}_i$$

が成立するとします。このとき

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \prod_{i=1}^{n} P(A_i) \quad (A_1 \in \mathcal{A}_1, \cdots, A_n \in \mathcal{A}_n) \tag{6.26}$$

が成立するならば、$\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ は独立となります。

Proof. 証明は $n = 2$ のとき与えます。

まず $A_2 \in \mathcal{A}_2$ に対して

$$\mathcal{G}_1 := \{B_1 \in \mathcal{B}_1;\ P(B_1 \cap A_2) = P(B_1) \cdot P(A_2)\}$$

と定めます。このとき仮定 (6.26) から

$$\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{G}_1$$

が成立します。また、$\mathcal{G}_1$ が Dynkin 族であることも示されます。他方 $\mathcal{A}_1$ は乗法系ですから Dynkin 族定理（定理 6.17）を用いると

$$\mathcal{G}_1 = \sigma[\mathcal{A}_1] = \mathcal{B}_1$$

が従います。このことは

$$P(B_1 \cap A_2) = P(B_1) \cdot P(A_2) \quad (B_1 \in \mathcal{B}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2) \tag{6.27}$$

を意味します。

次に $B_1 \in \mathcal{B}_1$ に対して

$$\mathcal{G}_2 := \{B_2 \in \mathcal{B}_2;\ P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2)\}$$

と定めます。このとき (6.27) から

$$\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{G}_2$$

が分ります。また、$\mathcal{G}_2$ は Dynkin 族であることも示されます。他方 $\mathcal{A}_2$ は乗法系ですから Dynkin 族定理（定理 6.17）を用いると

$$\mathcal{G}_2 = \sigma[\mathcal{A}_2] = \mathcal{B}_2$$

が従います。このことは

$$P(B_1 \cap B_2) = P(B_1) \cdot P(B_2) \quad (B_1 \in \mathcal{B}_1, B_2 \in \mathcal{B}_2) \tag{6.28}$$

を意味します。すなわち $\mathcal{B}_1$ と $\mathcal{B}_2$ は独立となります。 □

定理 6.19. $\mathcal{B}_i$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数とします $(i = 1, 2, \cdots, n)$。また $\mathcal{C}_j$ も $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数とします $(j = 1, 2, \cdots, m)$。このとき

$$\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m \text{は独立} \tag{6.29}$$

とすると

$$\mathcal{G}_1 = \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right],\ \mathcal{G}_2 = \sigma\left[\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{C}_j\right]$$

は独立となります。

Proof. まず

$$\mathcal{A}_1 = \left\{\bigcap_{i=1}^{n} B_i;\ B_i \in \mathcal{B}_i (i = 1, 2, \cdots, n)\right\}$$

$$\mathcal{A}_2 = \left\{\bigcap_{j=1}^{m} C_i;\ C_i \in \mathcal{C}_j (j = 1, 2, \cdots, m)\right\}$$

と定めます。すると $\mathcal{A}_1$ と $\mathcal{A}_2$ は乗法系で

$$\mathcal{G}_1 = \sigma[\mathcal{A}_1], \quad \mathcal{G}_2 = \sigma[\mathcal{A}_2]$$

が成立します。ここで

$$A_1 = \bigcap_{i=1}^{n} B_i \in \mathcal{A}_1 \quad B_i \in \mathcal{B}_i \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

$$A_2 = \bigcap_{j=1}^{m} C_j \in \mathcal{A}_2 \quad C_j \in \mathcal{C}_j \quad (j = 1, 2, \cdots, m)$$

とすると

$$\begin{aligned}
P(A_1 \cap A_2) &= P\left(\bigcap_{i=1} B_i \cap \bigcap_{j=1}^{m} C_j\right) \\
&= \prod_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot \prod_{j=1}^{m} P(C_j) \\
&= P(A_1) \cdot P(A_2)
\end{aligned}$$

が従います。ここで仮定 (6.29) から

$$\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n \text{が独立} \tag{6.30}$$

であることと

$$\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m \text{が独立} \tag{6.31}$$

であることを導いて用いています。

この時点で前定理 6.18 を用いると $\mathcal{G}_1$ と $\mathcal{G}_2$ が独立であることが従います。 □

この定理 6.19 の逆の次の定理も成立して、定理 6.19 と同様の証明を与えることができます。

定理 6.20. $\mathcal{F}$ の部分代数 $\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n$ が独立であるとします。また $\mathcal{F}$ の部分代数 $\mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m$ も独立であるとします。さらに

$$\mathcal{G}_1 := \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right], \quad \mathcal{G}_2 := \sigma\left[\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{C}_j\right]$$

も独立とします。このとき

$$\mathcal{B}_1, \cdots, \mathcal{B}_n, \mathcal{C}_1, \cdots, \mathcal{C}_m$$

は独立となります。

6.5.4 確率変数の独立性

σ 代数の逆像

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えます。そして、その上の確率変数

$$X: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

を考えます。このとき X の可測性から

$$\sigma(X) := \{X^{-1}(B); \ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

は

$$\sigma(X) \subset \mathcal{F}$$

を満すことが分ります。さらに $\sigma(X)$ が σ 代数となることも示せます。

このことは、ベクトル値の確率変数

$$\mathbf{X}: \ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

でも同様で、

$$\sigma(\mathbf{X}) := \{\mathbf{X}^{-1}(B); \ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}^n}\}$$

も

$$\sigma(X) \subset \mathcal{F}$$

を満す σ 代数であることが分ります。

演習 6.14. 可測空間 $(S_1, \mathcal{F}_1)$ と $(S_2, \mathcal{F}_2)$ があるとします。可測写像

$$f:\ S_1 \longrightarrow S_2$$

に対して

$$f^{-1}(\mathcal{F}_2) := \{f^{-1}(B_2);\ B_2 \in \mathcal{F}_2\}$$

と定めると、$f^{-1}(\mathcal{F}_2)$ が $\mathcal{F}_1$ の部分代数となることを示してください。

確率変数の独立性

以上の準備の下で確率変数の独立性について定義します。

確率変数 $X_i:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ があるとします $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$。このとき

$$X_1, \cdots, X_\ell \text{が独立である}$$

とは $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数

$$\sigma(X_1), \ldots, \sigma(X_\ell)$$

が独立であることをいいます。このことを言い換えると 1 次元の Borel 集合 $B_1, \cdots, B_\ell \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して

$$P(X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_\ell^{-1}(B_\ell)) = P(X_1^{-1}(B_1)) \cdots P(X_\ell^{-1}(B_\ell))$$

すなわち

$$P(X_1 \in B_1, \cdots, X_\ell \in B_\ell) = P(X_1 \in B_1) \cdots P(X_\ell \in B_\ell)$$

が成立することです。

ここで定理 6.18 を用いて独立性の判定を簡略化します。まず

$$\mathcal{I}_1 := \{(a, b]; -\infty \leq a < b \leq +\infty\}$$

と定めて、これを用いて

$$\mathcal{A}_i := \{X_i^{-1}(I);\ I \in \mathcal{I}_1\}$$

とします。すると $\mathcal{A}_i$ は $\sigma(X_i)$ を生成する乗法系であることが分ります。従って、定理 6.19 を用いると、

$$\text{確率変数 } X_1, \cdots, X_\ell \text{が独立である}$$

ことの必要十分条件は

$$P\left(X_1^{-1}(I_1) \cap \cdots \cap X_\ell^{-1}(I_\ell)\right) = P\left(X_1^{-1}(I_1)\right) \cdots P\left(X_\ell^{-1}(I_\ell)\right)$$

が全ての $I_1, \cdots, I_\ell \in \mathcal{I}_1$ に対して成立することであることが分ります。この条件は $I_j = (a_j, b_j]$ と定めると

$$P\left(a_1 < X_1 \leq b_1, \cdots, a_\ell < X_\ell \leq b_\ell\right) = P\left(a_1 < X_1 \leq b_1\right) \cdots P\left(a_\ell < X_\ell \leq b_\ell\right)$$

と同値となります。

確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ があるとします。また X の同時確率密度が $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で与えられているとします。このとき、X_i の周辺確率密度関数が $f_i(x_i)$ で与えられているとします。例えば f_1 は、

$$B = \{x = (x_1, x_2, \cdots, x_n);\ a_1 \leq x_1 \leq b_1\}$$

に対して

$$P(a_1 \leq X_1 \leq b_1) = \int_B f(x_1, \cdots, x_n)dx = \int_{a_1}^{b_1} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx' \right) dx_1$$

から

$$f_1(x_1) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)dx'$$

で与えられます。（ここで $x' = (x_2, \cdots, x_n)$ としています。）

ここで確率変数 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ が独立であるとします。このとき

$$\begin{aligned} P(a_1 \leq X_1 \leq a_2, \cdots, a_n \leq X_n \leq b_n) &\leq P(a_1 \leq X_1 \leq a_2) \cdots P(a_n \leq X_n) \\ &\leq \left(\int_{a_1}^{b_1} f_1(x_1)dx_1 \right) \cdots \left(\int_{a_n}^{b_n} f_n(x_n)dx_n \right) \\ &= \int_{B_0} f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)dx \end{aligned}$$

で与えられます。ここで

$$B_0 = \{(x_1, \cdots, x_n);\ a_1 \leq x_1 \leq a_2, \cdots, a_n \leq x_n \leq b_n\}$$

とおいています。このことは

$$f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

と同時確率密度関数が周辺確率密度関数の積になっていることを意味します。

演習 6.15. 確率変数 $X_1, \cdots, X_n$ の同時確率密度関数が $f(x)$ で与えられていて、X_i の周辺確率密度関数が $f_i(x_i)$ で与えられているとします。もし

$$f(x) = f_1(x_1) \cdots f_n(x_n)$$

が成立しているならば $X_1, \cdots, X_n$ は独立となることを示してください。

ベクトル値の確率変数の独立性

前節に引続きベクトル値の確率変数の独立性について議論します。確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の n_i 次元の確率変数

$$\mathbf{X}_i :\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^{n_i}$$

を考えます $(i = 1, 2, \cdots, \ell)$。このとき

$$\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_\ell \text{が独立である}$$

とは $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数

$$\sigma(\mathbf{X}_1), \cdots, \sigma(\mathbf{X}_\ell) \text{ が独立である}$$

ことです。すなわち

$$P\left(\mathbf{X}_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \mathbf{X}_\ell^{-1}(B_\ell)\right) = P\left(\mathbf{X}_1^{-1}(B_1)\right) \cdots P\left(\mathbf{X}_\ell^{-1}(B_\ell)\right)$$

が成立することです。ここで

$$\mathcal{A}_i = \{\mathbf{X}_i^{-1}(I_1^{(i)} \times \cdots \times I_{n_i}^{(i)}); I_1^{(i)}, I_2^{(i)}, \cdots, I_{n_i}^{(i)} \in \mathcal{I}_1\}$$

と定めると、$\mathcal{A}_i$ は乗法系となり

$$\sigma[\mathcal{A}_i] = \sigma(\mathbf{X}_i)$$

を得ます。従って、定理 6.19 を用いると

$$\mathbf{X}_1, \cdots, \mathbf{X}_\ell \text{が独立である}$$

ことの必要十分条件は

$$\begin{aligned} & P(\mathbf{X}_1 \in I_1^{(1)} \times \cdots \times I_{n_1}^{(1)}, \cdots, \mathbf{X}_\ell \in I_1^{(\ell)} \times \cdots \times I_{n_\ell}^{(\ell)}) \\ = \quad & P(\mathbf{X}_1 \in I_1^{(1)} \times \cdots \times I_{n_1}^{(1)}) \cdots P(\mathbf{X}_\ell \in I_1^{(\ell)} \times \cdots \times I_{n_\ell}^{(\ell)}) \end{aligned}$$

と表されます。

次に確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に確率変数

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m$$

があるとします。そして結合変数を

$$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n), \ \mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_m)$$

と定めます。このとき次の定理が成立します。

定理 6.21. 条件

$$\text{確率変数 } X_1 \cdots, X_n \text{は独立である}$$

ことと

$$\text{確率変数 } Y_1 \cdots, Y_m \text{は独立である}$$

ことを仮定します。このとき

$$\begin{aligned} & X_1, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m \text{は独立である} \\ \Leftrightarrow \quad & \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ は独立である} \end{aligned}$$

が成立します。

Proof.

$$\mathcal{B}_1 := \sigma(X_1), \cdots, \mathcal{B}_n := \sigma(X_n)$$

$$\mathcal{C}_1 := \sigma(Y_1), \cdots, \mathcal{C}_m := \sigma(Y_m)$$

とすると

$$\mathcal{G}_1 := \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right] = \sigma(\mathbf{X}), \quad \mathcal{G}_2 := \sigma\left[\bigcup_{j=1}^{m} \mathcal{C}_j\right] = \sigma(\mathbf{Y}) \tag{6.32}$$

が成立します。実際

$$\begin{aligned} \sigma(\mathbf{X}) &= \sigma\left[\left\{\mathbf{X}^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n);\ B_i \in \mathcal{B}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)\right\}\right] \\ &= \sigma\left[\left\{X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n);\ B_i \in \mathcal{B}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)\right\}\right] \end{aligned}$$

が成立します。また $B_i \in \mathcal{B}_i$ のとき

$$X_i^{-1}(B_i) = \mathbf{X}^{-1}(\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R} \times B_i \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R})$$

から

$$\sigma(\mathbf{X}) \supset \sigma(X_i) = \mathcal{B}_i$$

を得ます。これから

$$\sigma(\mathbf{X}) \supset \bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i$$

従って

$$\sigma(\mathbf{X}) \supset \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right]$$

を得ます。さらに

$$\sigma(\mathbf{X}) \supset \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right] \supset \left\{X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n);\ B_i \in \mathcal{B}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)\right\}$$

から

$$\sigma(\mathbf{X}) \supset \sigma\left[\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{B}_i\right] \supset \sigma\left[\left\{X_1^{-1}(B_1) \cap \cdots \cap X_n^{-1}(B_n);\ B_i \in \mathcal{B}_i\ (i = 1, 2, \cdots, n)\right\}\right] = \sigma(\mathbf{X})$$

となり (6.32) が示されました。

以上のことと定理 6.19, 定理 6.20 を適用すれば、この定理が従います。 □

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ に確率変数

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m$$

があるとします。そして結合変数を

$$\mathbf{X} = (X_1, \cdots, X_n),\ \mathbf{Y} = (Y_1, \cdots, Y_m)$$

と定めます。そして Borel 写像

$$f:\ \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

と

$$g:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$$

があるとします。このとき次の定理が成立します。

定理 6.22. 確率変数

$$X_1, X_2, \cdots, X_n, Y_1, \cdots, Y_m$$

が独立とします。このとき $f(\mathbf{X})$ と $g(\mathbf{Y})$ は独立となります。

Proof. これは $\sigma(\mathbf{X})$ と $\sigma(\mathbf{Y})$ が独立であることと

$$\{\mathbf{X}^{-1}(f^{-1}(B));\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} \subset \sigma(\mathbf{X})$$

$$\{\mathbf{Y}^{-1}(g^{-1}(B));\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\} \subset \sigma(\mathbf{Y})$$

すなわち

$$\sigma(f \circ \mathbf{X}) \subset \sigma(\mathbf{X}), \quad \sigma(g \circ \mathbf{Y}) \subset \sigma(\mathbf{Y})$$

から従います。 □

この定理 6.22 の簡単な応用を演習にします。

演習 6.16. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数

$$X_1, \cdots, X_{n-1}, X_n$$

が独立とします。このとき

$$Z = X_1 + \cdots + X_{n-1},\ X_n$$

は独立であることを示してください。

6.6 条件付期待値

6.6.1 条件付確率

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を考えます。事象 $B \in \mathcal{F}$ が

$$P(B) > 0$$

を満たしているとします。このとき B が与えられているという条件の下で $A \in \mathcal{F}$ が起る**条件付確率**を

$$P_B(A) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

によって定義します。

定理 6.23. 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上

$$P_B:\ \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

は確率測度を定めます。

演習 6.17. 定理 *6.23* を証明しましょう。

定理 6.24. $X \in L^1(\Omega, P)$ とします。このとき

$$\int_\Omega X dP_B = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

が成立します。

Proof. 非負値の可測な単関数

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$$

に対して考えます。すると

$$\int_\Omega X dP_B = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P_B(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$

$$\frac{1}{P(B)} \int_B X dP = \frac{1}{P(B)} \cdot \sum_{i=1}^{n} P(A_i \cap B)$$

から等式は成立します。可積分な X に対しては、X_+ と $-X_-$ を非負値の可測な単関数列で近似すれば、等式は証明されます。 □

以下、この定理 6.24 で与えられた等式に現れた量を

$$E[X|B] := \int_\Omega X dP_B = \frac{1}{P(B)} \int_B X dP$$

と記して、B が与えられたときの X の**条件付期待値**と呼びます。

演習 6.18. $A \in \mathcal{F}$ に対して

$$E[\chi_A|B] = P_B(A)$$

を示しましょう。

6.6.2　離散的な確率変数による条件付け

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の離散的な確率変数 Y を考えます。すなわち

$$Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \cdots\}, \quad y_i \neq y_j \ (i \neq j)$$

が成立するとします。以下では簡単のため

$$B_i := \{\omega \in \Omega;\ Y(\omega) = y_i\} = Y^{-1}(\{y_i\})$$

に対して

$$P(B_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \cdots)$$

が成立すると仮定します。さらに $X \in L^1(\Omega, P)$ を取ります。このとき Ω 上の確率変数 $E[X|Y]$ を

$$E[X|Y](\omega) := E[X|B_k] \quad (Y(\omega) = y_k)$$

により定めて、Y が与えられたときの X の条件付期待値と呼びます。$E[X|Y]$ が可測であるのは

$$E[X|Y] := \sum_{k=1}^{+\infty} E[X|B_k]\chi_{B_k}$$

と非負値の可測な単関数列の単調増加極限として表されますから明らかです。

演習 6.19. $A, B \in \mathcal{F}$ で

$$0 < P(B) < 1$$

が成立するとします。このとき $\omega \in \Omega$ に対して

$$E[\chi_A|\chi_B](\omega) = \begin{cases} P_B(A) & (\omega \in B) \\ P_{\Omega \setminus B}(A) & (\omega \notin B) \end{cases}$$

を示しましょう。

定理 6.25. 等式

$$E[E[X|Y]] = E[X]$$

が成立します。

Proof.

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_k} X(\omega)dP(\omega) \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} P(B_k)E[X|B_k] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[E[X|Y]] &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_k} E[X|Y]dP \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{B_k} E[X|B_k]dP \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} E[X|B_k] \cdot \int_{B_k} dP = \sum_{k=1}^{+\infty} E[X|B_k] \cdot P(B) \end{aligned}$$

から等式が得られます。 □

定理 6.26. **(i)** $E[X|Y]$ は σ 代数

$$\sigma(Y) := \{Y^{-1}(C);\ C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

に関して可測です。

(ii) $B \in \sigma(Y)$ に対して

$$\int_B E[X|Y]dP = \int_B XdP$$

が成立します。

Proof. $B \in \sigma(Y)$ とします。このとき $C \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ が存在して

$$B = Y^{-1}(C) = \sum_{y_k \in C} B_k$$

と表示されます。従って、$\{B_k\}$ のうち高々可算個の和集合が $\sigma(Y)$ の可測集合であることが分ります。他方

$$g = E[X|Y] = \sum_{k=1}^{+\infty} E[X|B_k]\chi_{B_k}$$

から $C' \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ に対して

$$g^{-1}(C') = \sum_{E[X|B_k] \in C'} B_k$$

となり、$E[X|Y]$ が $\sigma(Y)$ 可測であることが分ります。

この状況で上の $B \in \sigma(Y)$ に対して

$$\begin{aligned}
\int_B E[X|Y]dP &= \sum_{y_k \in C} \int_{B_k} E[X|Y]dP = \sum_{y_k \in C} \int_{B_k} E[X|B_k]dP \\
&= \sum_{y_k \in C} P(B_k)E[X|B_k] = \sum_{y_k \in C} \int_{B_k} XdP = \int_B XdP
\end{aligned}$$

と定理の等式が証明されます。 □

6.6.3 一般の確率変数による条件付け

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可積分な確率変数 X を考えます。これに加えて確率変数 Y も取ります。

確率変数 Y が離散的である場合は、上で構成した Ω 上の確率変数 $E[X|Y]$ は条件

$$E[X|Y] \text{ は } \sigma(Y) \text{ 可測である}$$

$$\int_A E[X|Y]dP = \int_A XdP \quad (A \in \sigma(Y))$$

が成立しました。以下では、一般の確率変数 Y に対してこの条件を満す確率変数 $E[X|Y]$ を構成します。

定理 6.27. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $X \in L^1(\Omega, P)$ を考えます。また Ω 上の可測関数 Y を取ります。このとき Ω 上の $\sigma(Y)$ 可測な関数 g が存在して

$$\int_B g(\omega) dP(\omega) = \int_B X(\omega) dP(\omega)$$

が任意の $B \in \sigma(Y)$ に対して成立します。

Proof. σ 代数 $\sigma(Y)$ 上の加法的関数

$$\Phi(B) := \int_B X dP \quad (B \in \sigma(Y))$$

を定めます。この Φ は P に関して絶対連続となります。すなわち

$$P(B) = 0,\ B \in \sigma(Y) \Rightarrow \Phi(B) = 0$$

が成立します。ここで Radon-Nikodym の定理を用いると、$\sigma(Y)$ 可測な $g \in L^1(\Omega, \sigma(Y), P)$ が存在して

$$\int_B g(\omega) dP(\omega) = \Phi(B) = \int_B X(\omega)$$

を満たします。 □

この g の一意性について次の定理が成立します。

定理 6.28. $X_1, X_2 \in L^1(\Omega, P)$ とします。このとき

$$X_1 = X_2 \quad (a.s.)$$

すなわち

$$P(\{\omega;\ X_1(\omega) = X_2(\omega)\}) = 1$$

が成立するならば

$$E[X_1|Y] = E[X_2|Y] \quad (a.s.)$$

が従います。

この定理 6.28 は次の定理からすぐに従います。

定理 6.29. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ と $\mathcal{F}$ の部分代数 $\mathcal{G}$ があるとき、$\mathcal{G}$ に関して可測な確率変数 $X \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ を考えます。このとき

$$\int_B X dP = 0 \quad (B \in \mathcal{G})$$

が成立するならば

$$X = 0 \quad (a.s.)$$

が成立します。

Proof. 任意の自然数 n に対して

$$A_n = \{\omega \in \Omega;\ |X(\omega)| \geq \frac{1}{n}\}, \quad B_n = \Omega \setminus A_n$$

と定めます。このとき

$$P(A_n) = 0 \quad \text{従って} \quad P(B_n) = 1$$

が成立することを示します。まず

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot P(|X| \geq \frac{1}{n}) = \int_{\{X \geq \frac{1}{n}\}} \frac{1}{n} dP \leq \int_{\{X \geq \frac{1}{n}\}} |X| dP$$

となります。ここで $\{\omega;\ |X| \geq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{G}$ ですから、最左辺は 0 となります。これから

$$P(A_n) = 0$$

を得ます。次に

$$\{\omega \in \Omega;\ X(\omega) = 0\} = \bigcap_{n=1}^{+\infty} B_n$$

$$B_1 \supset B_2 \supset B_3 \supset \cdots$$

から

$$P(X = 0) = \lim_{n \to +\infty} P(B_n) = 1$$

を得ます。 □

ここで条件付期待値についていくつかの例をみてみます。

例 6.3. 確率空間として $\Omega = [0,1]$、$\mathcal{F} = \mathcal{B}_{[0,1]}$ として測度は *Lebesgue* 測度を考えます。このとき

$$X(x) = 2x^2, \quad Y(x) = 1 - |2x - 1|$$

を考えます。このとき $\sigma(Y) \in B$ は $[0, \frac{1}{2}]$ に含まれる *Borel* 集合 C と、それを $\frac{1}{2}$ に関して数直線上対称に移動した C' を用いて

$$B = C \cup C'$$

と表すことができます。このことから特に B は $\frac{1}{2}$ に関して対称であることが分ります。$x \in \mathbb{R}$ を $\frac{1}{2}$ に関して対称な位置に移動すると $y = 1 - x$ になることに注意しましょう。すると

$$\begin{aligned}
\int_B X(x)dx &= \int_B x^2 dx + \int_B x^2 dx = \int_B x^2 dx + \int_B (1-y)^2 dy \\
&= \int_B x^2 dx + \int_B (1-x)^2 dx = \int_B \left\{x^2 + (1-x)^2\right\} dx
\end{aligned}$$

となります。これから

$$E[X|Y](x) = x^2 + (1-x)^2$$

であることが分ります。

6.6.4 部分 σ 代数による条件付け

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可積分な確率変数 $X \in L^1(\Omega, P)$ を考えます。また $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数であるとします。このとき $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\Phi(B) := \int_B X(\omega) dP(\omega)$$

とすると Φ は $\mathcal{G}$ 上絶対連続となります。このことから Radon-Nikodym の定理を用いると $\mathcal{G}$ 可測な確率変数 $E[X|\mathcal{G}] \in L^1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ が存在して

$$\int_B E[X|\mathcal{G}] dP = \int_B X(\omega) dP(\omega) \tag{6.33}$$

が任意の $B \in \mathcal{G}$ に対して成立します。この $E[X|\mathcal{G}]$ の一意性に関しては、Radon-Nikodym の定理に含まれる内容ですが、定理 6.29 から従います。この $E[X|\mathcal{G}]$ を $\mathcal{G}$ によって条件付けられた X の**条件付期待値**とよびます。

ここで前節で解説しました確率変数に関する条件付との関連を説明します。すなわち別の確率変数 Y があるとき

$$\mathcal{G} = \sigma(Y) = \{Y^{-1}(B);\ B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}\}$$

とすれば

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X|Y]$$

が成立します。

ここで条件付確率について、いくつかの性質をまとめます。

定理 6.30. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の可積分な確率変数

$$X, X_1, X_2 \in L^2(\Omega, P)$$

と $\mathcal{F}$ の部分 σ 代数 $\mathcal{G}$ があるとします。このとき以下が成立します。

(i) (線型性)

$$E[aX_1 + bX_2|\mathcal{G}] = aE[X_1|\mathcal{G}] + b[X_2|\mathcal{G}]$$

(ii)

$$E[E[X|\mathcal{G}]] = E[X]$$

(iii) Z が $\mathcal{G}$ 可測な確率変数とすると

$$E[ZX|\mathcal{G}] = Z \cdot E[X|\mathcal{G}]$$

が成立します。

(iv) X が $\mathcal{G}$ と独立であるとします。すなわち、任意の $D \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$ と $B \in \mathcal{G}$ に対して $X^{-1}(D)$ と B が独立であるとします。このとき

$$E[X|\mathcal{G}] = E[X]$$

と条件付期待値は定数になります。

(v) $X \geq 0$ ならば $E[X|\mathcal{G}] \geq 0$ が従います。

Proof. **(i)** これは $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_B (aX_1 + bX_2)dP &= a\int_B X_1 dP + b\int_B X_2 dP = a\int_B E[X_1|\mathcal{G}]dP + b\int_B E[X_2|\mathcal{G}]dP \\ &= \int_B \left(aE[X_1|\mathcal{G}] + bE[X_2|\mathcal{G}]\right) dP\end{aligned}$$

と条件付期待値の一意性から従います。

(ii) これは (6.33) において $B = \Omega$ とした

$$\int_\Omega E[X|\mathcal{G}]dP = \int_\Omega X dP$$

に他なりません。

(iii) $A \in \mathcal{G}$ に対して $Z = \chi_A$ と表されている場合をまず考えます。この場合は $B \in \mathcal{G}$ に対して

$$\begin{aligned}\int_B ZE[X|\mathcal{G}]dP &= \int_B \chi_A E[X|\mathcal{G}]dP = \int_{A\cap B} E[X|\mathcal{G}]dP \\ &= \int_{A\cap B} X dP = \int_B \chi_A \cdot X dP\end{aligned}$$

から

$$E[\chi_A \cdot X|\mathcal{G}] = \chi_A \cdot E[X|\mathcal{G}] =$$

を得ます。

　次に、Z が

$$Z = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{A_j}$$

と $A_1, \cdots, A_m \in \mathcal{G}$ を用いて表示される場合は、**(i)** を用いて

$$E[ZX|\mathcal{G}] = E[\sum_{j=1}^m a_j\chi_{A_j} X|\mathcal{G}] = \sum_{j=1}^m E[a_j\chi_{A_j}X|\mathcal{G}] = \sum_{j=1}^m a_j\chi_{A_j}E[X|\mathcal{G}] = ZE[X|\mathcal{G}]$$

と証明できます。 □