① ミクロで使う数学.

1) $z = f(x, y)$

z がいつ極大化・極小化.

2) $g(x, y) = 0$ の下で

$z = f(x, y)$

がいつ極大化・極小化.

Lagrangeの未定乗数法

1変数の微積分だけを前提とする.

② 時間により変化するシステム

動学系 (dynamical system)

$$\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$$

A: 2次正方行列.

行列の固有値問題

$a_0, a_1, a_2, \cdots\cdots$

初項

例 $b_0 = M = 600$

年利 $100r$ %.

毎年 T 返済.

$$b_{n+1} = (b_n - T)(1+r)$$

差分方程式.

問: $\{b_n\}$ を求めよ.

$b_{50} < 0$ となる T

CT 3page. 数列の基本 ① 等差数列

② 等比数列.

③ 和分.

$$a_0,\ a_1 = a_0 + d,\ a_2 = a_1 + d,\ \cdots\cdots$$
$$= a_0 + 2d$$

差分方程式.

$$a_{n+1} = a_n + d \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$a_n = a_0 + nd. \quad \text{等差数列.}$$

等比数列

$$a_0,\ a_1 = a_0\cdot\alpha,\ a_2 = a_1\cdot\alpha,\ \cdots$$

$$\cdots,\ a_{n+1} = a_n\cdot\alpha,\ \cdots$$

$$\boxed{a_n = a_0\cdot\alpha^n}$$

$$\Updownarrow$$

$$a_{n+1} = a_n\cdot\alpha \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

差分方程式.

和

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

公式 ① $$\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k) = \sum_{k=0}^{n} a_k + \sum_{k=0}^{n} b_k$$

$$(a_0+b_0)+(a_1+b_1)+\cdots+(a_n+b_n)$$
$$= (a_0+a_1+\cdots+a_n) + (b_0+b_1+\cdots+b_n)$$

λ: 定数 (nに依らない)

② $$\sum_{k=0}^{n}\lambda a_k = \lambda\sum_{k=0}^{n} a_k$$

$$\lambda a_0 + \lambda a_1 + \cdots + \lambda a_n = \lambda(a_0+a_1+\cdots+a_n)$$

① $$\sum_{k=1}^{n} k = 1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\begin{array}{rl} & 1 \overset{+1}{\curvearrowright} 2 + 3 + \cdots + 100 \\ +) & 100 \underset{-1}{\curvearrowright} 99 + 98 + \cdots + 1 \\ \hline & 101 + 101 + 101 + \cdots + 101 = 100 \times 101 \end{array}$$

$$1+2+\cdots+100 = \frac{100 \times 101}{2}$$

---

② $r \neq 1$

$$S'_n = \sum_{k=0}^{n} r^k = 1 + r + r^2 + \cdots + r^n$$
$$= \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$$\begin{array}{rl} S_n = & 1 + r + r^2 + \cdots + r^n \\ -) \; rS'_n = & \quad\;\; r + r^2 + \cdots + r^n + r^{n+1} \\ \hline (1-r)S'_n = & 1 \qquad\qquad\qquad\qquad - r^{n+1} \end{array}$$

$$S'_n = \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$$

$|r|<1$ $$\sum_{n=0}^{+\infty} r^n = 1 + r + r^2 + \cdots\cdots$$
$$= \frac{1}{1-r}$$

CT 31p. 代用創造.
垂直なり集.

CT 7p. 差分方程式.

$$\begin{cases} a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ a_0 = c. \end{cases}$$

定常解. $a_0 = a_1 = a_2 = \cdots\cdots$

$$a_n = \lambda \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

"特性方程式"

$$\lambda = 3\lambda + 4 \qquad \lambda = -2.$$

$$\rightsquigarrow \quad a_n = -2 \quad (n = 0, 1, 2, \cdots)$$

$$\begin{array}{rl} & a_{n+1} = 3a_n + 4 \\ - \big) & \lambda = 3\cdot\lambda + 4 \\ \hline & a_{n+1} - \lambda = 3(a_n - \lambda) \end{array}$$

$\rightsquigarrow$ $\{a_n - \lambda\}$ 公比 3 の 等比数列.

$$a_n - \lambda = a_n + 2 = b_n \qquad b_{n+1} = 3 b_n$$

$$\downarrow$$

$$a_n + 2 = 3^n (a_0 + 2) \longleftarrow b_n = 3^n \cdot b_0$$

$$\boxed{a_n = 3^n (a_0 + 2) - 2.}$$

演習 1.2 はやっておく.

$b_0 = M$

年利 $100r$%, 毎年 T 返済.

$$b_{n+1} = (b_n - T)(1+r)$$

$$b_{n+1} = (1+r)b_n - T(1+r)$$

$$\lambda = (1+r)\lambda - T(1+r)$$

$$\lambda = \frac{T}{r}(1+r) = \lambda_0 \text{ とおく.}$$

$$b_{n+1} - \lambda_0 = (1+r)(b_n - \lambda_0)$$

$\{b_n - \lambda_0\}$ は公比 $(1+r)$ の等比数列.

$$b_n = (1+r)^n (M - \lambda_0) + \lambda_0$$

$$= (1+r)^n \left\{M - \frac{T}{r}(1+r)\right\} + \frac{T}{r}(1+r)$$

$$b_n \searrow \iff M - \frac{T}{r}(1+r) < 0$$

$$\iff T > \frac{r}{1+r} M$$

$M = 600$

$r = 0.01$ $\quad T_0 \doteqdot 6$

$M = 1000$

$r = 0.01, \cdots$ ← 変える.

$b_{50} < 0$ になる条件を考える

$$b_{50} = (1+r)^{50}\left(M - \frac{T}{r}(1+r)\right) + \frac{T}{r}(1+r) < 0$$

$$\frac{T}{r}(1+r) < (1+r)^{50}\left(\frac{T}{r}(1+r) - M\right)$$

$\cdots$ log をとる. 面倒する

行列

$$A = \begin{array}{c} \text{1行} \\ \begin{pmatrix} \boxed{a \quad b} \\ c \quad d \end{pmatrix} \end{array}$$

1行2列 (1, 2) 成分

2×2 行列.

2次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

$$\lambda A = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{22} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}$$

λ : 実数

積

$$A = \begin{pmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \text{1列}$$

$$\vec{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} \text{2列.}$$

$$\boxed{A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\vec{a}_1 + y\vec{a}_2}$$

$$= x\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x a_{11} + y a_{12} \\ x a_{21} + y a_{22} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{R}$ 実数全体の集合.

$\mathbb{R}^2$ 2次元実ベクトル全体の集合.

$$f_A : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \left(\vec{a_1} \ \vec{a_2} \right)$$

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{a_1}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \vec{a_2}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 1 + b \cdot 0 \\ c \cdot 1 + d \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \cdot 0 + b \cdot 1 \\ c \cdot 0 + d \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

CT 203p. 定理 7.1. をやっておく.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \left(\vec{a_1} \ \vec{a_2} \right)$$

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \left(\vec{b_1} \ \vec{b_2} \right)$$

$$AB = A\left(\vec{b_1} \ \vec{b_2} \right) = \left(A\vec{b_1} \ \ A\vec{b_2} \right)$$

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

単位行列.

$$A I_2 = \left(A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = \left(\vec{a_1} \ \ \vec{a_2} \right) = A$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x + 0 \cdot y \\ 0 \cdot x + 1 \cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

定理 7.1 (2)

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_2 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad A = (\vec{a}_1 \ \vec{a}_2)$$

$$I_2 A = (I_2 \vec{a}_1 \ \ I_2 \vec{a}_2)$$
$$= (\vec{a}_1 \ \ \vec{a}_2) = A$$

I identity

まとめ $\quad A I_2 = I_2 A = A.$

演習7.2をやっておく.

転置行列は後にやる.

CT 205p. $\quad x, y$ の連立1次方程式

$$\begin{cases} ax + by = \alpha \\ cx + dy = \beta \end{cases} \Longleftrightarrow A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

X, Y 集合.

$$\begin{array}{cccc} f: & X & \longrightarrow & Y \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

写像

X : 定義域

Y : 値域

$$\begin{cases} ax+by=\alpha & \cdots ① \\ cx+dy=\beta & \cdots ② \end{cases}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times d & adx+bdy &= \alpha d \\ ②\times b\ -) & cbx+bdy &= \beta b \\ \hline & (ad-bc)x &= \alpha d-\beta b \end{array}$$

$ad-bc \neq 0$ のとき

$$x=\frac{\alpha d-\beta b}{ad-bc}=\frac{\begin{vmatrix}\alpha & b\\ \beta & d\end{vmatrix}}{|A|}$$

$$|A| = \det(A) = ad-bc$$

determinant

Aの行列式

$$\boxed{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad-bc}$$

$$\begin{array}{lrl} ①\times c & acx+bcy &= \alpha c \\ ②\times a\ -) & acx+ady &= \beta a \\ \hline & (bc-ad)y &= \alpha c-\beta a \\ & (ad-bc)y &= \beta a-\alpha c \end{array}$$

$ad-bc \neq 0$

$$y=\frac{\beta a-\alpha c}{ad-bc}=\frac{\begin{vmatrix}a & \alpha\\ c & \beta\end{vmatrix}}{|A|}$$

クラメールの公式

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (\vec{a_1} \ \vec{a_2})$$

$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

'ぎょうれつ式' $\det(A) = |A| = ad - bc$

$ad - bc \neq 0$
$|A| \neq 0$ のとき.

$$x = \frac{\left| \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \ \vec{a_2} \right|}{|A|}$$

$$y = \left| \vec{a_1} \ \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \right| \Big/ |A|$$

クラメールの公式.

$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \vec{0}$ のとき.

$$x = \left| \begin{matrix} 0 & b \\ 0 & d \end{matrix} \right| \Big/ |A| = 0$$

$$y = \left| \begin{matrix} a & 0 \\ c & 0 \end{matrix} \right| \Big/ |A| = 0$$

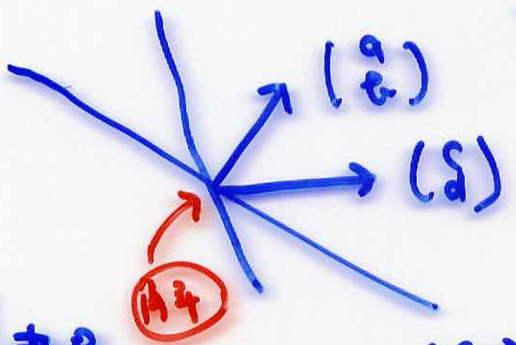
定理 $\det(A) \neq 0$ のとき.

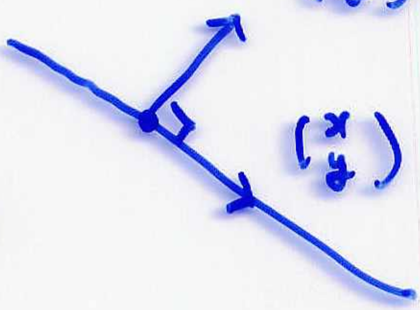
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Longrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 0$$

法線ベクトル

$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq \vec{0}$





$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0 \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \nparallel \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$

$\det(A) = 0$ のとき

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$ の解は？

定理 $\det(A) = 0$ のとき.

ある $\vec{x} \neq \vec{0}$ に対し $A\vec{x} = \vec{0}$ が成立

CT 207 page.

仮定 $ad - bc = 0$

$$\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix}$ は解.

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ は解.

に注意する.

① $a \neq 0$ または $b \neq 0$ のとき.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ が解.}$$

(13

② $c \neq 0$ または $d \neq 0$ のとき

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -c \end{pmatrix} \neq \vec{0} \text{ が解.}$$

③ (not ①) かつ (not ②) $(a = b = 0)$ かつ $(c = d = 0)$

$\equiv (a = b = c = d = 0)$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ どっちでもよい

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

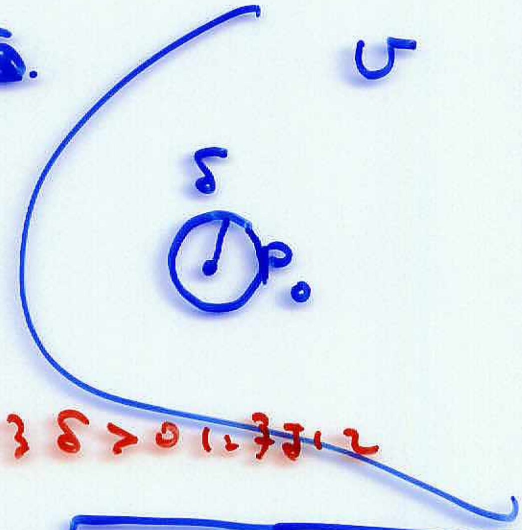
演習 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$AB = ?$

$BA = ?$

偏微分 [illegible]

開集合.　$\mathbb{R}^2$ 座標平面.



$U \subset \mathbb{R}^2$

U が 開集合 とは

$\underset{(x_0, y_0)}{P_0} \in U$ を任意にとる ある $\delta > 0$ に対して

$$B_\delta(P_0) := \left\{ (x, y) ; \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta \right\}$$

$\cap$ ← !!

U

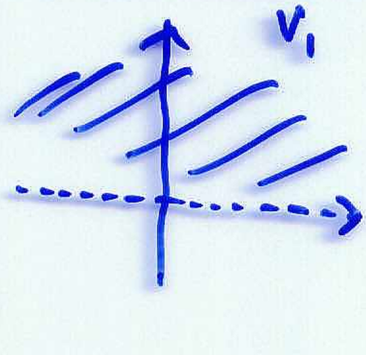
↑

中心 P_0, 半径 δ の
開円盤

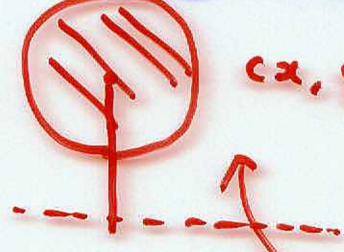
---

247 P.

$V_1 = \{ (x, y) ; y > 0 \}$



V_1

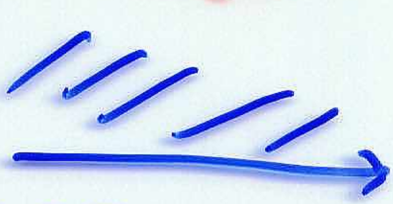


(x, y)　$y > 0$

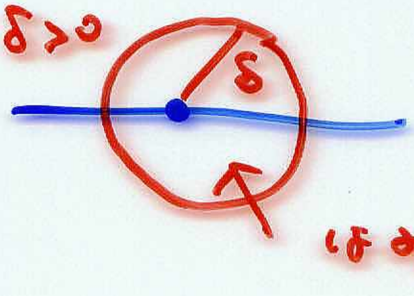
$\delta = \frac{y}{2}$

⇝ V_1 は 開集合.

$F_1 = \{ (x, y) ; y \geqq 0 \}$



$\delta > 0$



$(0, 0) \in F_1$

はみでる.　⇝ F_1 は 開集合 でない

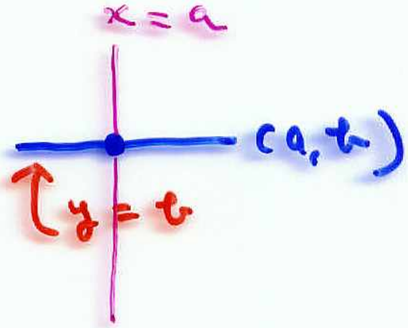
$U \subset \mathbb{R}^2$ 開集合.

CT 264 p.

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$

$z = f(x, y) \quad ((x, y) \in U)$

$(a, b) \in U$



$F(x) = f(x, b)$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = F'(a)$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{F(x) - F(a)}{x - a}$$

(a, b) における f の x に関する偏微分係数.

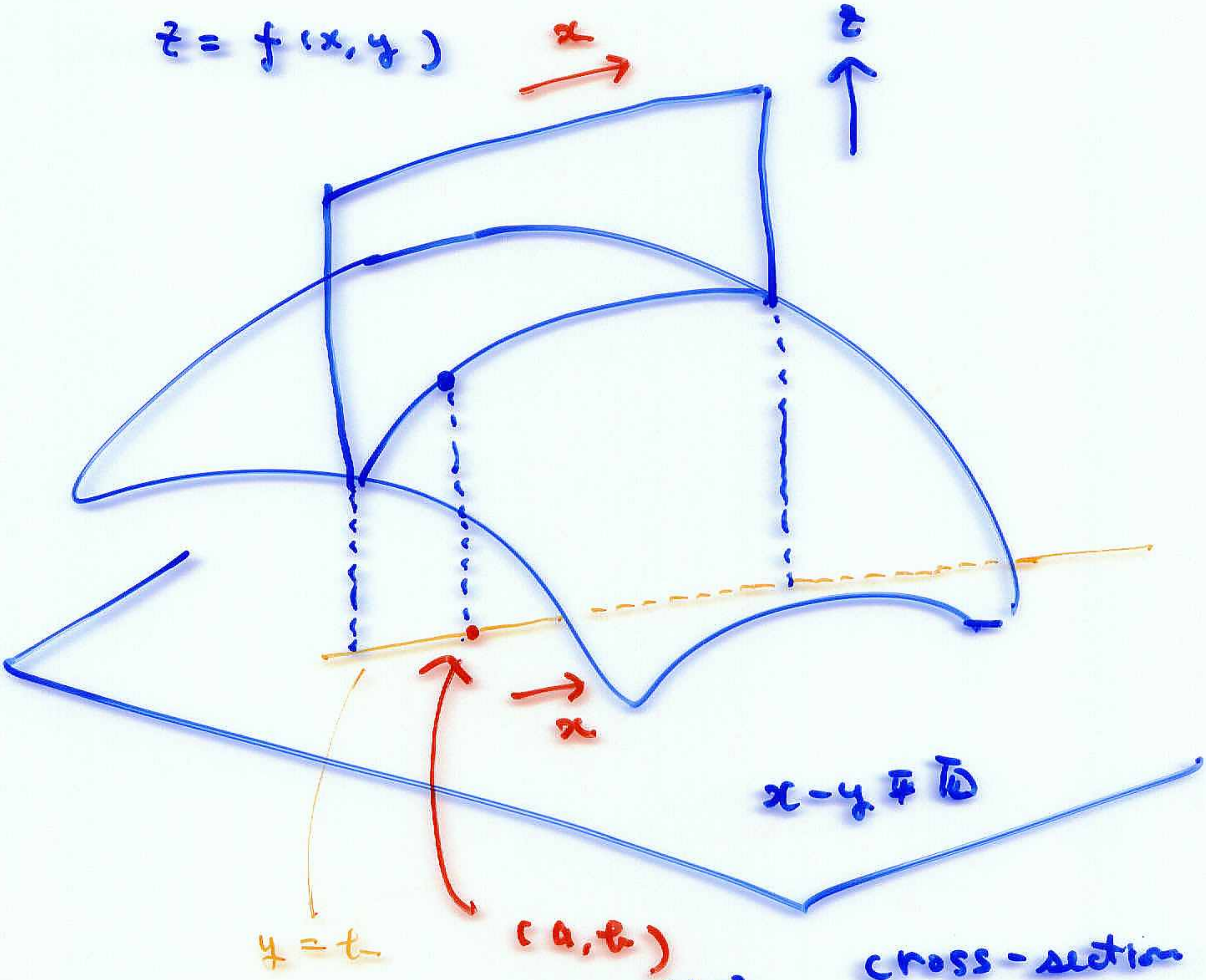
$$= \lim_{x \to a} \frac{f(x, b) - f(a, b)}{x - a}$$

$G(y) = f(a, y)$

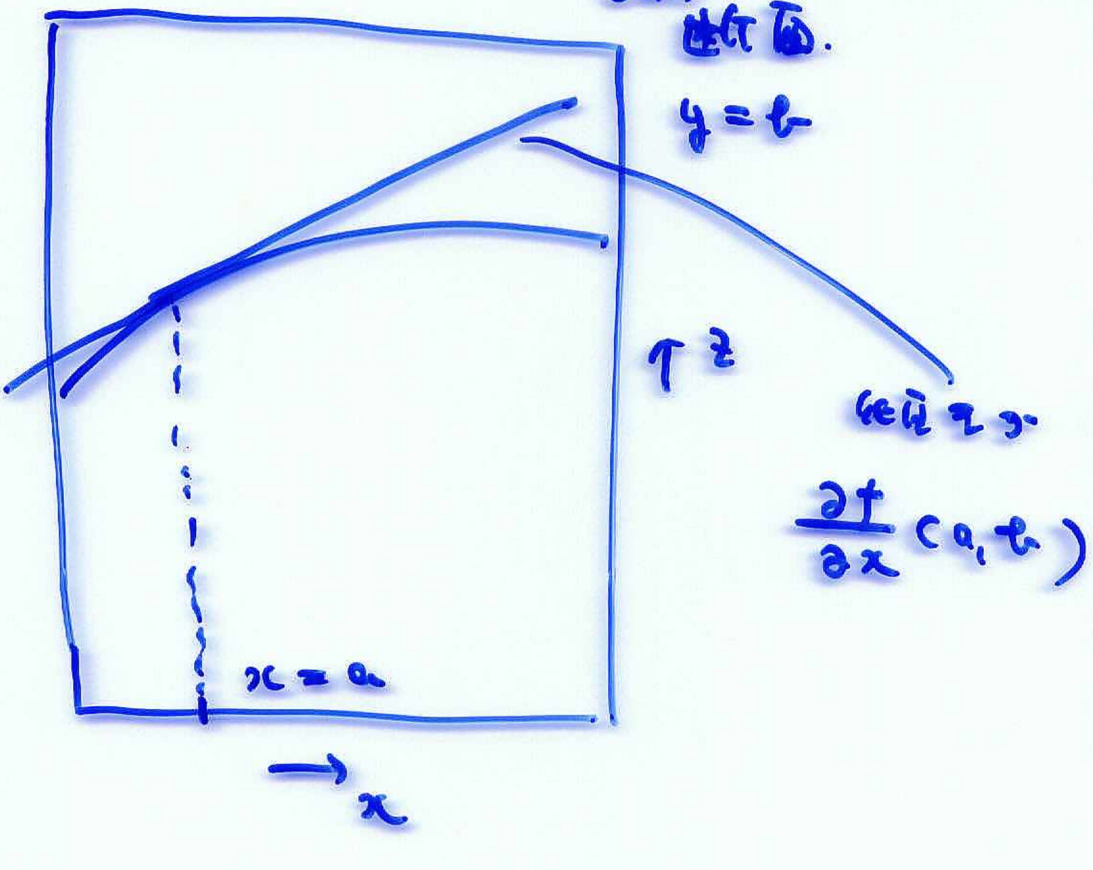
$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = G'(b)$$

$$= \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a, b)}{y - b}$$

y に関する偏微分係数.



(tn)
cross-section
断面.
$y = b$



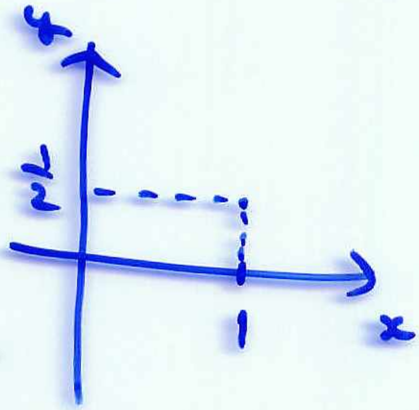
434 8.9

$z = x^2 - y^2$ $\qquad (1, \frac{1}{2})$

$z = F(x) = f(x, \frac{1}{2}) = x^2 - \frac{1}{4}.$

$F'(x) = 2x$

$\frac{\partial z}{\partial x}(1, \frac{1}{2}) = 2.$



$z = G(y) = f(1, y) = 1 - y^2$

$G'(y) = -2y.$

$\frac{\partial z}{\partial y}(1, \frac{1}{2}) = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1.$

---

434 8.10 $\qquad z = f(x, y) = x^3 + 2xy^2 + y^3.$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 2y^2 \cdot 1 + 0$

$= 3x^2 + 2y^2$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 0 + 2x \cdot 2y + 3y^2$

$= 4xy + 3y^2.$

極大・極小　　U：開集合

$f : U \longrightarrow \mathbb{R}$.

が (a, b) で 極小 (大) とは

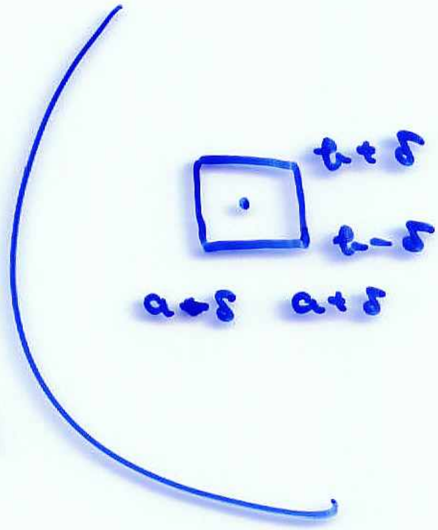
ある $\delta > 0$ に対し

$[a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$

の上で 最小 (最大)

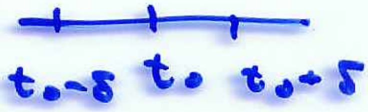
$$f(x, y) \underset{\leqq}{\geqq} f(a, b)$$

$(x, y) \in [a-\delta, a+\delta] \times [b-\delta, b+\delta]$

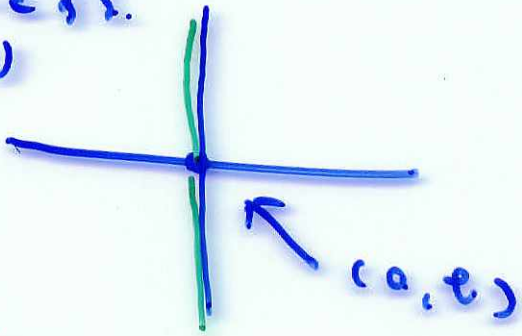


定理　$s = F(t)$ が $t = t_0$ で 極大 (極小)

$\Longrightarrow$　$F'(t_0) = 0$



$z = f(x, y)$ が (a, b) で
極小とする.
(大)



$z = F(x)$
$= f(x, b)$
は $x = a$ で 極小
(大)

$\Downarrow$

$F'(a) = 0$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = 0}$$

$z = G(y) = f(a, y)$
は $y = b$ で 極小 (大)

$G'(b) = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = 0$$

定理 U: 開
$f: U \longrightarrow \mathbb{R}$

$(a,b) \in U$ で f が極小(大)

$\Rightarrow$ $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) = 0$

この条件をみたす (a,b) を f の停留点と呼ぶ。

問34 8.11 269 page.

$$z = x^2 + 4xy + 2y^2 - 6x - 8y.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z_x = 2x + 4y \cdot 1 + 0 - 6 - 0$$
$$= 2x + 4y - 6 = 0$$
$$z_y = 0 + 4x \cdot 1 + 4y + 0 - 8$$
$$= 4x + 4y - 8 = 0$$

$$\begin{cases} x + 2y = 3 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

$(x, y) = (1, 1)$ が停留点

$\downarrow$

$(1,1)$ は極小点 である ことが分かる.

CT 269 p.

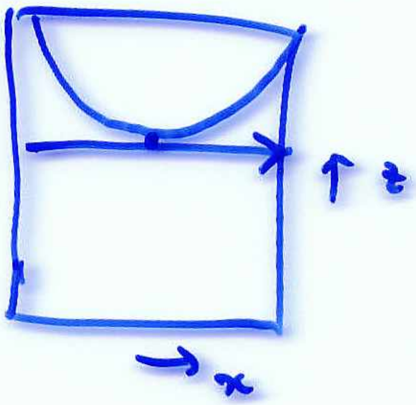
__注 8.1__ $z = x^2 - y^2$.

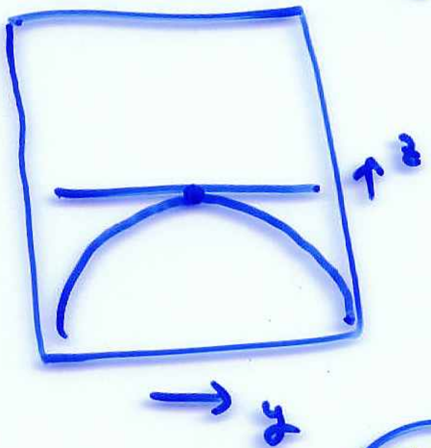
$z_x = 2x = 0, \quad z_y = -2y = 0$

$\longrightarrow$ $(0,0)$ が停留点

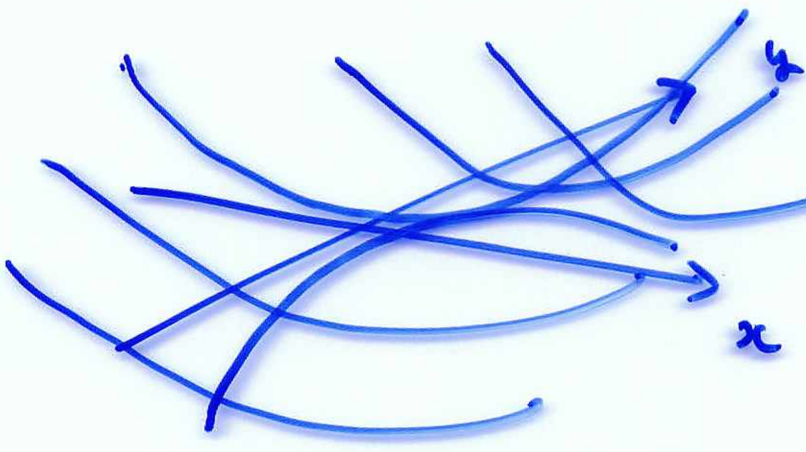
$(0,0)$ は極大でも極小でもない。

$y = 0 \quad z = x^2$ 　　　　　　 $x = 0 \quad z = -y^2$





鞍点



saddle point.

col

例 8.12　$z = x^3 - xy - y^2$

$$\begin{cases} z_x = 3x^2 - y \cdot 1 - 0 \\ \quad = 3x^2 - y = 0 \\ z_y = 0 - x \cdot 1 - 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 = y & \cdots ① \\ x + 2y = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

$x = -2y$ を①に代入　$12y^2 = y$.

$y = 0,\ \frac{1}{12}$

$\downarrow \qquad \downarrow$

$x = 0,\ -\frac{1}{6}$

$(0, 0),\ \left(\frac{1}{12}, -\frac{1}{6}\right)$ の2点が停留点.

例 8.13 + 演習 8.9

$s = F(t)$

$F'(t_0) = 0,\ F''(t_0) > 0 \Longrightarrow F(t)$ は

$<$

$t = t_0$ で

極小.

(大)