

確率変数の極限

Le 16 Décembre

戸瀬 信之

平均2乗収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列、

平均2乗収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列、 Z 確率変数

平均2乗収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列、 Z 確率変数
- $Z_n \longrightarrow Z$ (平均2乗収束)

平均2乗収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列、 Z 確率変数
- $Z_n \longrightarrow Z$ (平均2乗収束)
 $\Leftrightarrow$

平均2乗収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列、 Z 確率変数
- $Z_n \longrightarrow Z$ (平均2乗収束)
 $\Leftrightarrow E[(Z_n - Z)^2] \longrightarrow 0$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu,$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
 $E[\frac{1}{n}S_n] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n])$$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$
- $E\left[\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)^2\right] = V\left[\frac{1}{n}S_n\right]$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$
- $$E\left[\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)^2\right] = V\left[\frac{1}{n}S_n\right]$$
$$= n^{-2}V[X_1 + \dots + X_n] =$$
$$n^{-2} (V[X_1] + \dots + V[X_n])$$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$
- $$E\left[\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)^2\right] = V\left[\frac{1}{n}S_n\right]$$
$$= n^{-2}V[X_1 + \dots + X_n] =$$
$$n^{-2}(V[X_1] + \dots + V[X_n]) = n^{-2}n\sigma^2 = n^{-1}\sigma^2$$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E\left[\frac{1}{n}S_n\right] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$
- $$E\left[\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)^2\right] = V\left[\frac{1}{n}S_n\right]$$
$$= n^{-2}V[X_1 + \dots + X_n] =$$
$$n^{-2}(V[X_1] + \dots + V[X_n]) = n^{-2}n\sigma^2 = n^{-1}\sigma^2$$
$$\longrightarrow 0$$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$
- 証明 $A = \{\omega \in \Omega; |Y(\omega)| \geq a\}$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$
- 証明 $A = \{\omega \in \Omega; |Y(\omega)| \geq a\}$
$$E[Y^2] = E[Y^2|A] \cdot P(A) + E[Y^2|A^c] \cdot P(A^c)$$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$
- 証明 $A = \{\omega \in \Omega; |Y(\omega)| \geq a\}$
$$E[Y^2] = E[Y^2|A] \cdot P(A) + E[Y^2|A^c] \cdot P(A^c)$$
$$\geq E[Y^2|A] \cdot P(A)$$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$
- 証明 $A = \{\omega \in \Omega; |Y(\omega)| \geq a\}$
$$E[Y^2] = E[Y^2|A] \cdot P(A) + E[Y^2|A^c] \cdot P(A^c)$$
$$\geq E[Y^2|A] \cdot P(A) \geq a^2 P(A)$$

Chebyshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(|Y| \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$
- 証明 $A = \{\omega \in \Omega; |Y(\omega)| \geq a\}$
$$E[Y^2] = E[Y^2|A] \cdot P(A) + E[Y^2|A^c] \cdot P(A^c)$$
$$\geq E[Y^2|A] \cdot P(A) \geq a^2 P(A)$$

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$
- 定理確率変数 $Z_1, Z_2, \dots$

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$
- 定理確率変数 $Z_1, Z_2, \dots$
 $Z_n \rightarrow Z$ 平均 2 乗収束

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$
- 定理確率変数 $Z_1, Z_2, \dots$
$$Z_n \rightarrow Z \text{ 平均2乗収束} \Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ 確率収束}$$

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$
- 定理確率変数 $Z_1, Z_2, \dots$
$$Z_n \rightarrow Z \text{ 平均 2 乗収束} \Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ 確率収束}$$
- 証明 $\epsilon > 0$ に対して

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$
- 定理確率変数 $Z_1, Z_2, \dots$
$$Z_n \rightarrow Z \text{ 平均 2 乗収束} \Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ 確率収束}$$
- 証明 $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E((Z_n - Z)^2)$$

大数の弱法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数

大数の弱法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数
- $E[X_n] = \mu, V[X_n] = \sigma^2$

大数の弱法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数
- $E[X_n] = \mu, V[X_n] = \sigma^2 \Rightarrow$

大数の弱法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数
- $E[X_n] = \mu, V[X_n] = \sigma^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \cdot (X_1 + \dots + X_n) \longrightarrow \mu \quad \text{確率収束}$$