

確率変数の極限

Le 16 Décembre

戸瀬 信之

確率変数の極限Le 16 Décembre – p.1/6

平均2乗収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列、 Z 確率変数
- $Z_n \longrightarrow Z$ (平均2乗収束)
 $\Leftrightarrow E[(Z_n - Z)^2] \longrightarrow 0$

大数の平均2乗法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数の列
- $E[X_n] = \mu, \quad V[X_n] = \sigma^2$
- $\Rightarrow \frac{1}{n}\{X_1 + \dots + X_n\} \longrightarrow \mu$ 平均2乗収束
- 証明 $S_n := X_1 + \dots + X_n$
$$E[S_n] = \frac{1}{n}E[X_1 + \dots + X_n]$$
$$= \frac{1}{n} \cdot (E[X_1] + \dots + E[X_n]) = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu$$
- $E\left[\left(\frac{1}{n}S_n - \mu\right)^2\right] = V\left[\frac{1}{n}S_n\right]$
$$= n^{-2}V[X_1 + \dots + X_n] =$$
$$n^{-2}(V[X_1] + \dots + V[X_n]) = n^{-2}n\sigma^2 = n^{-1}\sigma^2$$
$$\longrightarrow 0$$

確率変数の極限 Le 16 Décembre – p.3/6

Chwbshev's inequality

- Y 確率変数、 $E[Y^2] < +\infty$
 $\Rightarrow$ 全ての $a > 0$ に対して
$$P(Y \geq a) \leq \frac{1}{a^2} \cdot E[Y^2]$$
- 証明 $A = \{\omega \in \Omega; |Y(\omega)| \geq a\}$
$$E[Y^2] = E[Y^2|A] \cdot P(A) + E[Y^2|A^c] \cdot P(A^c)$$
$$\geq E[Y^2|A] \cdot P(A) \geq a^2 P(A)$$

確率収束

- $Z_1, Z_2, \dots$ 確率変数の列
- 任意の $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow +\infty)$$
$$\Rightarrow Z_n \rightarrow Z \text{ (確率収束)}$$
- 定理 確率変数 $Z_1, Z_2, \dots$
 $Z_n \rightarrow Z$ 平均 2 乗収束 $\Rightarrow Z_n \rightarrow Z$ 確率収束
- 証明 $\epsilon > 0$ に対して
$$P(|Z_n - Z| > \epsilon) \leq \frac{1}{\epsilon^2} E((Z_n - Z)^2)$$

確率変数の極限 Le 16 Décembre – p.5/6

大数の弱法則

- $X_1, X_2, \dots$ 独立な確率変数
- $E[X_n] = \mu, V[X_n] = \sigma^2 \Rightarrow$

$$\frac{1}{n} \cdot (X_1 + \dots + X_n) \longrightarrow \mu \quad \text{確率収束}$$