$$f : X \longrightarrow Y \supset A$$

$f^{-1}(A^c) = (f^{-1}(A))^c$ を示す.

$$f^{-1}(A) := \{x \in X ; f(x) \in A\}$$

$x \in f^{-1}(A^c) \iff f(x) \in A^c$

$\iff f(x) \notin A.$

$\iff \mathrm{NOT}\ (f(x) \in A)$

$\iff \mathrm{NOT}\ (x \in f^{-1}(A))$

$\iff x \in (f^{-1}(A))^c$

確率空間
$(\Omega, \mathcal{F}, P)$

Y : 実数値確率変数

$E[Y^2] = 0 \iff Y = 0 \quad (y \in \Omega \setminus C)$

$P(C) = 0.$

$X_1, \cdots, X_n, \cdots$ 独立

$\iff X_1, \cdots, X_n$: 独立 (全てのn)

$E[cX] = cE[X]$ 　　c : 定数

$V[cX] = c^2 V[X]$

連続

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "Y"] \arrow[rr, bend right, "|Y|"'] & \mathbb{R} \arrow[r] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$y \longmapsto |y|$

Borel 可測

$|Y|$　　$|Y|$ 可測

$$\begin{tikzcd} S_1 \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & S_2 \arrow[r, "g"] & S_3 \end{tikzcd}$$

f, g: 可測 $\Rightarrow$ $g \circ f$ 可測

$P(A) > 0$　　$A \in \mathcal{F}$.

$$P_A(B) := \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$$

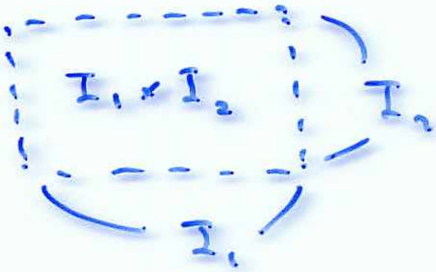
$(\cancel{P_A};$ $(\Omega, \mathcal{F}, P_A)$: 確率空間.

$E[f \mid A]$　　$\Omega \xrightarrow{f} \mathbb{R}$ 確率変数

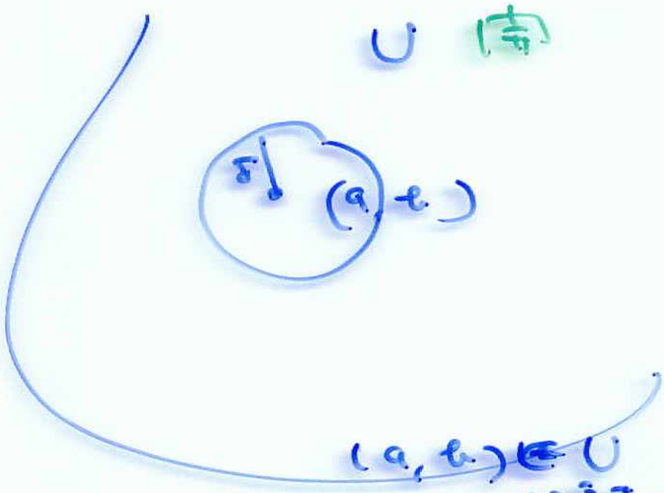
Aが起こるときの条件付期待値.　P_A をもとに期待値を計算.

$A_1, \cdots, A_n$　　$A_i \cap A_j = \phi$, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \Omega$

$$E[f] = \sum_{i=1}^{n} E[f \mid A_i] P(A_i)$$



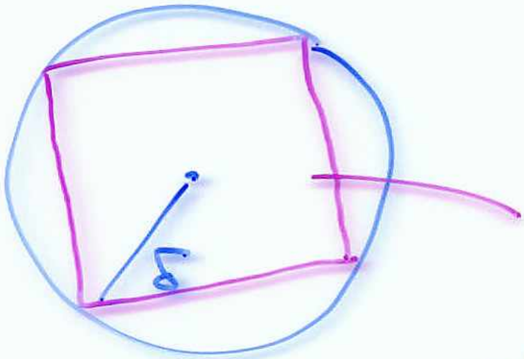
U 開



$(a,b) \in U$ に対して

U: 開 $\exists \delta > 0$

$B_\delta(a,b) \subset U$



$\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta, a + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta\right) \times \left(b - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta, b + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta\right)$

$\mathbb{Q}^2 = \{(q_1, q_2);\ q_i \in \mathbb{Q}\}$

$\underbrace{U \cap \mathbb{Q}^2}$ ← 可算個

$$\left[\begin{array}{l} (a,b) \in U \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \quad \exists (q_1, q_2) \in U \cap \mathbb{Q}^2 \\ \quad\quad d((a,b),(q_1,q_2)) < \varepsilon \end{array}\right]$$

この事実を使うと $\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \subset \sigma[A_1]$

$$U = \bigcup_{i=1}^{+\infty} \underbrace{\left(q_1^{(i)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_i, q_1^{(i)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_i\right) \times \left(q_2^{(i)} - \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_i, q_2^{(i)} + \frac{\sqrt{2}}{2}\delta_i\right)}_{\in \sigma[A_1]}$$

$$\sigma[\mathcal{O}_{\mathbb{R}^2}] \subset \sigma[A_1] \subset \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

$$\| $$

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$$

$$A_1 \subset \{ B_1 \times B_2 \,;\, B_1, B_2 \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \}$$

逆は easier.

$$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

f が連続 $\Longleftrightarrow$ 各点 $x \in \mathbb{R}^n$ で連続

$\Longleftrightarrow$ (各点 x で $x_j \to x \quad (j \to +\infty)$ $\Rightarrow f(x_j) \to f(x)$) 定義

$\Updownarrow$

$\forall U : \mathbb{R}^m$ 開 に対して

$f^{-1}(U)$ 開.

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ 可測

$\Longleftrightarrow$ (B : 開 $\subset \mathbb{R}^m$ Borel 集合

$f^{-1}(B) : \mathbb{R}^n$ の Borel)

$\Longleftrightarrow$ $U : \mathbb{R}^m$ の開集合

$f^{-1}(U) : \mathbb{R}^n$ の 開 Borel

$\searrow$ 開 $\nearrow$

連続のとき

~~$X \xrightarrow{f} Z, \quad Y \xrightarrow{g} Z$~~

~~$X \times Y \longrightarrow$~~

$$X \xrightarrow{f} Z, \quad X \xrightarrow{g} Y$$

$$\begin{aligned}(f, g) : X &\longrightarrow Z \times Y \\ x &\longmapsto (f(x), g(x))\end{aligned}$$

$f : \Omega \longrightarrow S_1 \times \cdots \times S_n$

$\uparrow$

可測集合

$\uparrow$

$\{ B_1 \times \cdots \times B_n \} \quad B_i \in \mathcal{B}_i$

で生成

f: 可測 $\iff$ $f^{-1}(B_1 \times \cdots \times B_n)$ 可測 $\in \mathcal{F}$

$\qquad \| $

$f_1^{-1}(B_1) \cap f_2^{-1}(B_2) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(B_n)$

$$\begin{tikzcd} \Omega \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "g \circ f"'] & S_1 \arrow[r, "g"] & S_2 \end{tikzcd}$$

f, g: 可測

$\Longrightarrow g \circ f$ 可測

$B \in \mathcal{F}_2$

$\cap$

S_2

$(g \circ f)^{-1}(B)$ 可測

$\qquad \|$

$f^{-1}(g^{-1}(B))$