集合について

- 以下、全体集合 Ω を固定
- $A_\lambda \subset \Omega \quad (\lambda \in \Lambda)$
- 和集合
  $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{\omega \in \Omega;\ \exists\lambda \in \Lambda\ \omega \in A_\lambda\}$
- 共通部分
  $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda := \{\omega \in \Omega;\ \forall\lambda \in \Lambda\ \omega \in A_\lambda\}$
- 差 $A, B \subset \Omega$
  $A \setminus B := \{\omega \in \Omega;\ \omega \in A,\ \omega \notin B\}$
  $B^c = X \setminus B = \{\omega \in \Omega;\ \omega \notin B\}$

逆像について

- Ω, S 集合
- $f:\ \Omega \longrightarrow S$ 写像
- $U \subset S$

$$f^{-1}(U) := \{\omega \in \Omega;\ f(\omega) \in U\}$$

- 公式 $U_\lambda \subset S \quad (\lambda \in \Lambda)$

$$f^{-1}(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$$

$$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$$

逆像について No2

- $f:\ \Omega \longrightarrow S$ 写像、 $U_\lambda \subset S \quad (\lambda \in \Lambda)$
- $$f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$$
- 証明 $\omega \in f^{-1}(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda) \quad \Leftrightarrow f(\omega) \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$
  $\Leftrightarrow f(\omega) \in U_\lambda\ (\forall\lambda \in \Lambda)$
  $\Leftrightarrow \omega \in f^{-1}(U_\lambda)\ (\forall\lambda \in \Lambda)$
  $\Leftrightarrow \omega \in \bigcap_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(U_\lambda)$

可測空間

- Ω 集合

$$\mathcal{P}_\Omega = \{A;\ A \text{ は } \Omega \text{ の部分集合}\}$$

- $\mathcal{F} \subset \mathcal{P}_\Omega$:σ 代数とは

$$\Omega \in \mathcal{F} \tag{3}$$

$$A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c := \{\omega \in X;\ \omega \notin A\} \in \mathcal{F} \tag{3}$$

$$A_n \in \mathcal{F}\ (n = 1, 2, 3, \cdots) \Rightarrow \bigcup_{i=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F} \tag{3}$$

可測空間No2

- $(\Omega, \mathcal{F})$ 可測空間、$\mathcal{F}$ が σ 代数
- 可測空間の性質
- (i) $\emptyset \in \mathcal{F}$
- (ii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cup \cdots \cup A_n \in \mathcal{F}$
- (iii) $A_1, \cdots, A_n \in \mathcal{F} \Rightarrow A_1 \cap \cdots \cap A_n \in \mathcal{F}$
- (iv) $A_1, A_2, \cdots \in \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F}$
- (v) $A, B \in \mathcal{F} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{F}$

記号

- $A, B \in \mathcal{P}_\Omega$, $A \cap B = \emptyset$

$$A + B = A \cup B$$

- $A_n \in \mathcal{P}_\Omega \ (n = 1, 2, \cdots)$

$$A_i \cap A_j = \emptyset \quad (i \neq j)$$

$\Rightarrow$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n$$

確率空間

- 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ が確率空間とは

$$P : \mathcal{F} \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$P(A) \geq 0 \quad (A \in \mathcal{F}) \tag{6}$$

$$P(\sum_{n=1}^{+\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{+\infty} P(A_n) \tag{6}$$

$$P(\Omega) = 1 \tag{6}$$

確率空間No2

- (i) $P(A_1 + A_2 + \cdots + A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$
- (ii) $P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2)$
- (iii) $P(\emptyset) = 0$
- (iv) $A \subset B \Rightarrow P(A) \leq P(B)$
- (v) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n \to +\infty} P(A_n)$

確率空間 No3

- (v) $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \Rightarrow P(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n)$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \cdots$$

$$A_n = A_1 + (A_2 \setminus A_1) + (A_3 \setminus A_2) + \cdots + (A_n \setminus A_{n-1})$$

$$\begin{aligned} P(\textstyle\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n) &= P(A_1 + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} (A_{n+1} \setminus A_n)) \\ &= P(A_1) + \textstyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= P(A_1) + \lim_{N\to+\infty} \textstyle\sum_{n=1}^{N} P(A_{n+1} \setminus A_n) \\ &= \lim_{N\to+\infty} P(A_N) \end{aligned}$$

σ 代数

- 集合 Ω
  $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}_\Omega \quad \Rightarrow \exists! \mathcal{F}$ σ 代数

$$\mathcal{G} \supset \mathcal{A}, \quad \mathcal{G} \text{ は } \sigma \text{ 代数} \Rightarrow \mathcal{F} \subset \mathcal{G}$$

- $\mathcal{F} = \sigma[\mathcal{A}]$ $\mathcal{A}$ が生成する σ 代数
- 構成 $\sigma[\mathcal{A}] = \bigcap_{\mathcal{G}:\sigma\text{代数},\mathcal{A}\subset\mathcal{G}} \mathcal{G}$

σ 代数 No2, Borel sets

- $\mathcal{O}$ $\mathbb{R}^n$ の開集合の全体
- $\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} = \sigma[\mathcal{O}]$ Borel 集合族
  $\mathcal{A}_1 = \{I;\ I \text{ は開区間}\}$
  $\mathcal{A}_2 = \{I;\ I \text{ は有界開区間}\}$
  $\mathcal{A}_3 = \{I;\ I \text{ は閉区間}\}$
  $\mathcal{A}_4 = \{I;\ I \text{ は有界閉区間}\}$
  $\mathcal{A}_5 = \{I;\ I \text{ は区間}\}$
  $\mathcal{A}_6 = \{(a,b];\ -\infty \le a < b \le +\infty\}$

$$\sigma[\mathcal{A}_i] = \mathcal{B}_{\mathbb{R}}$$

σ 代数 No3、積

- $\Omega_1,\ \Omega_2, \cdots, \Omega_n$ 集合、
- $\mathcal{F}_j$：Ω_j の σ 代数
- $\mathcal{A} := \{B_1 \times B_2 \times \cdots \times B_n;\ B_j \in \mathcal{F}_j\ (j = 1, 2, \cdots, n)\}$
  積 σ 代数 $\mathcal{B}_1 \times \mathcal{B}_2 \times \cdots \times \mathcal{B}_n := \sigma[\mathcal{A}]$
- **N.B.**

$$\mathcal{B}_{\mathbb{R}^n} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}^m} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^{m+n}}$$

$$\mathcal{A}_1 = \{I_1 \times I_2; I_1, I_2 \text{は開区間}\}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}_{\mathbb{R}^2} \subset \sigma[\mathcal{A}_1] \quad \to \mathcal{B}_{\mathbb{R}} \times \mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \mathcal{B}_{\mathbb{R}^2}$$

可測関数・確率変数

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 確率空間
- $X:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ が確率変数とは
  $X^{-1}(B) \in \mathcal{F} \quad (B \in \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$
  $\Leftrightarrow X^{-1}(I) \in \mathcal{F} \quad (I \in \mathcal{I}_j)$
- 可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{F}_1), (\Omega_2, \mathcal{F}_2)$
  $f:\ \Omega_1 \longrightarrow \Omega_2$ が可測とは
  $$f^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega_1;\ f(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}_1 \quad (\forall B \in \mathcal{F}_2)$$
- $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}_2$ が $\sigma[\mathcal{A}] = \mathcal{F}_2$ を満たすとき f が可測
  $\Leftrightarrow f^{-1}(B) \in \mathcal{F}_1 \quad (B \in \mathcal{A})$

ベクトル値の確率変数（準備）

- 写像 $f:\ \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ が可測のとき
  $\Rightarrow f$ を Borel 写像とよぶ。
- f 連続 $\Rightarrow f$ 可測
- 可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ と $(S_1, \mathcal{G}_1), \cdots, (S_n, \mathcal{G}_n)$
  可測写像 $f_i:\ \Omega_i \longrightarrow S_i$
  $\Rightarrow$
  $f = (f_1, \cdots, f_n):\ \Omega \longrightarrow S_1 \times \cdots \times S_n$ は可測

ベクトル値の確率変数

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 確率空間、 可測写像
  $F:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$ をベクトル値の確率変数
- 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上の確率変数 $X_1, \cdots, X_n$
  $F:\ \Omega \to \mathbb{R}^n \omega \mapsto (X_1(\omega), \cdots, X_n(\omega))$
  $\Rightarrow F$ はベクトル値の確率変数
- ベクトル値の確率変数 $F:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^n$
  第 i 成分 $f_i:\ \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \ \Rightarrow F$ は確率変数
- N.B. $f:\ \Omega \longrightarrow S_1,\ g:\ S_1 \longrightarrow S_2$
  $\Rightarrow g \circ f$ は可測
- N.B. $\pi_i:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ 可測写像。