X を集合とする

$A, B \subset X$

aとる

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

を示せ.

c complementary set

A^c は A の補集合.

$a \notin A^c \iff a \in X$ では..
$a \notin X$

$x \in (A \cup B)^c \iff x \notin A \cup B.$

$\iff \mathrm{NOT}(x \in A \cup B)$

$\iff \mathrm{NOT}\ (x \in A \ \mathrm{OR}\ x \in B)$

$\iff \cancel{x}\ \mathrm{NOT}\ (x \notin A)\ \mathrm{AND}$
$\in$
$\mathrm{NOT}\ (x \in B)$

$\iff x \in A^c\ \mathrm{AND}\ x \in \cancel{x} B^c$

$\iff x \in A^c \cap B^c$

NOT $\neg$

$\wedge$ $\vee$

and or

$f : \Omega \to S$

$S \supset A$

$f^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega ; f(\omega) \in A\}$

$\Omega = \{1, 2, 3\}$

$$\mathcal{P}_\Omega = \{ \emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\} \}$$

Ω [illegible] trivial [illegible]

$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}_\Omega$

$$\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$$
$$\uparrow$$
$$\Omega \in \mathcal{F}.$$

$k \geq n+1$

$A_k = \emptyset$

$$A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \cup \overbrace{\emptyset \cup \emptyset \cup \dots}$$
$$= A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n \in \mathcal{F}$$

$A_1^c, \dots, A_n^c \in \mathcal{F}$

$A_1^c \cup A_2^c \cup \dots \cup A_n^c \in \mathcal{F}$

$= (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n)^c$

$\rightsquigarrow A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n \in \mathcal{F}$

$(B^c)^c = B$

$A_1, \dots, A_n, \dots \in \mathcal{F}$

$$\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n^c \in \mathcal{F}$$
$$\parallel$$
$$\left(\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \right)^c$$

$$\bigcap_{n=1}^{+\infty} A_n \in \mathcal{F} \longleftarrow$$

$A \setminus B = A \cap B^c \in \mathcal{F}$

$A, B^c \in \mathcal{F}$

$f(x)$ 連続

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1, \quad f(x) \geqq 0$$

$$\int_{\sum_n A_n} f(x)\,dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_{A_n} f(x)\,dx$$

A_n : どの程度のものが許されるのか？

$\longrightarrow$ ルベーグ積分

$\Omega \cap \phi = \phi$

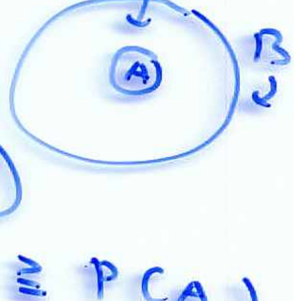
$$\underbrace{P(\Omega + \phi)}_{\shortparallel} = P(\Omega) = 1$$

$P(\Omega) + P(\phi) \rightsquigarrow P(\phi) = 0$

$A \subset B \Longrightarrow P(A) \leqq P(B)$ $\quad B \setminus A$

$A, B \in \mathcal{F}$

$A + (B - A) = B$



$$P(B) = P(A + (B \setminus A))$$
$$= P(A) + \underbrace{P(B \setminus A)}_{\geqq 0} \geqq P(A)$$

∃! unique に存在

一つしかない

$\mathcal{F}_\lambda \subset \mathcal{P}_\Omega$

$\mathcal{F}_\lambda$: σ代数 $\lambda \in \Lambda$ $\Longrightarrow$ $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} \mathcal{F}_\lambda$: σ代数

∃ $\mathcal{G}_1$: σ代数 $\supset \mathcal{A}$

$$\mathcal{F} = \bigcap_{\substack{\mathcal{G}:\ \sigma代数 \\ \mathcal{G} \supset \mathcal{A}}} \mathcal{G} \ni \subset \mathcal{G}_1$$

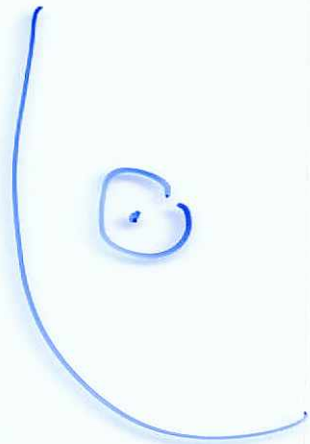
$U \subset \mathbb{R}^n$ 開集合

任意の $x \in U$ $\exists r > 0$

$B_r(x) \subset U$

‖

中心 x, 半径 r の開球



$(a, +\infty] = (a, +\infty)$ ℚ 可算個

U : ℝの開集合. $U \cap \mathbb{Q} = \{x_1, x_2, \dots\}$

x_i

$I_i \subset U$

$$U = \bigcup_{i=1}^{+\infty} I_i$$

$\mathcal{O} \subset \sigma(\mathcal{A}_1)$.

- $\exists\ A_1 \subset A_2 \subset \mathcal{P}$

$\sigma[A_1] \subset \sigma[A_2]$

$$\boxed{\begin{array}{l} \mathcal{F} : \sigma\text{代数} \\ \sigma[\mathcal{F}] = \mathcal{F} \end{array}}$$

$\mathcal{O} \subset \sigma[A_1] \rightsquigarrow \underset{\underset{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{\shortparallel}}{\sigma[\mathcal{O}]} \subset \underset{\underset{\sigma[A_1]}{\shortparallel}}{\sigma[\sigma[A_1]]}$

$A_1 \subset \mathcal{O} \Rightarrow \sigma[A_1] \subset \underset{\underset{\mathcal{B}_{\mathbb{R}}}{\shortparallel}}{\sigma[\mathcal{O}]}$

$P(a \le X \le b) = P(a \le Y \le b)$

$\Rightarrow X = Y$

$X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

が… 確率 変数

$\Leftrightarrow$

$X^{-1}(\ (a, b]\ ) \in \mathcal{F}$

$\Leftrightarrow \{\omega ;\ a < X_{(\omega)} \le b\} \in \mathcal{F}$