確率変数の特性関数(NO3)
Le 02 Décembre

戸瀬　信之

独立な指数変数の和（復習）

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数 $(\lambda > 0)$

独立な指数変数の和（復習）

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数 $(\lambda > 0)$

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x} Y(x)$$

独立な指数変数の和（復習）

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数 $(\lambda > 0)$

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x} Y(x)$$

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ 独立な確率変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$

独立な指数変数の和（復習）

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数 $(\lambda > 0)$

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x} Y(x)$$

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ 独立な確率変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の密度

独立な指数変数の和（復習）

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数 $(\lambda > 0)$

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x} Y(x)$$

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ 独立な確率変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の密度
  $h(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda z}$

Γ 関数（復習）

- 定義

Γ関数（復習）

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$

Γ 関数（復習）

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- 性質

Γ関数（復習）

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- 性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),\ \Gamma(1) = 1$

Γ 関数（復習）

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- 性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(n+1) = n!$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布：

Γ分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ分布： 確率密度

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布： 確率密度
  $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布： 確率密度
  $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布： 確率密度
  $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y) g(y) dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和 **No2**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt =$
$z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$

独立なガンマ変数の和 **No2**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt =$
$z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$

$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

独立なガンマ変数の和 **No2**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) \;=\; \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt =$
$z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$

$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$

独立なガンマ変数の和 **No3**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

独立なガンマ変数の和 **No3**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z) dz = 1$

独立なガンマ変数の和 **No3**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z) dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$

独立なガンマ変数の和 **No3**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z)dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$
- $\longrightarrow I = \frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$

独立なガンマ変数の和 **No3**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z)dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$
- $\longrightarrow I = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$
- $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu)} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

ベータ関数

- 正数 $\lambda, \mu > 0$ に対してベータ関数

ベータ関数

- 正数 $\lambda,\ \mu > 0$ に対してベータ関数

$$B(\lambda,\mu) := \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

ベータ関数

- 正数 $\lambda,\ \mu > 0$ に対してベータ関数

$$B(\lambda,\mu) := \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

$$B(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X：

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \leq a \leq b$ のとき $P(a \leq Y \leq b)$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \leq a \leq b$ のとき
$P(a \leq Y \leq b)$
$= P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \leq X \leq -\sqrt{a})$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数
$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$
- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \le a \le b$ のとき
$$P(a \le Y \le b)$$
$$= P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \le X \le -\sqrt{a})$$
$$= 2P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b})$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \leq a \leq b$ のとき
$P(a \leq Y \leq b)$

$$= P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \leq X \leq -\sqrt{a})$$

$$= 2P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b})$$

$$= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \le a \le b$ のとき

$$\begin{aligned}
&P(a \le Y \le b) \\
&\quad = P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \le X \le -\sqrt{a}) \\
&\quad = 2P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b}) \\
&\quad = 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&\quad = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt
\end{aligned}$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \le a \le b$ のとき
$P(a \le Y \le b)$

$$= P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \le X \le -\sqrt{a})$$

$$= 2P(\sqrt{a} \le X \le \sqrt{b})$$
$$= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$
$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X： 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は？ $0 \leq a \leq b$ のとき
$P(a \leq Y \leq b)$

$$= P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \leq X \leq -\sqrt{a})$$

$$= 2P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b})$$
$$= 2\int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$
$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数 $\to$ 確率変数 $Y = X^2$

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数 $\to$ 確率変数 $Y = X^2$
  Y の確率密度

正規変数と Γ 分布 **NO2**

- X 標準正規変数 $\rightarrow$ 確率変数 $Y = X^2$
  Y の確率密度 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数 $\to$ 確率変数 $Y = X^2$
  Y の確率密度 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$
  $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ の Γ 変数

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数 $\to$ 確率変数 $Y = X^2$
  Y の確率密度 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$
  $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ の Γ 変数 $\to$ 自由度 0 の χ^2 分布

正規変数と Γ 分布 **NO2**

- X 標準正規変数 $\to$ 確率変数 $Y = X^2$
  Y の確率密度 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$
  $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ の Γ 変数 $\to$ 自由度 0 の χ^2 分布

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数 $\rightarrow$ 確率変数 $Y = X^2$
  Y の確率密度 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$
  $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ の Γ 変数 $\rightarrow$ 自由度 0 の χ^2 分布

χ^2 分布

- X_i 独立な標準正規変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$

χ^2 分布

- X_i 独立な標準正規変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Y_i = X_i^2$ 独立となる

χ^2分布

- X_i 独立な標準正規変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Y_i = X_i^2$ 独立となる

- $Z = Y_1 + \cdots + Y_n$

χ^2 分布

- X_i 独立な標準正規変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Y_i = X_i^2$ 独立となる

- $Z = Y_1 + \cdots + Y_n$
  $\lambda = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{n}{2}$ の Γ 変数

χ^2 分布

- X_i 独立な標準正規変数 $(i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Y_i = X_i^2$ 独立となる

- $Z = Y_1 + \cdots + Y_n$
  $\lambda = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{n}{2}$ の Γ 変数
  これを自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布とよぶ

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数 X ：

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- X の特性関数

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- X の特性関数
  Taylor 展開 $\cos(x\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \xi^{2k}$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- X の特性関数
  Taylor 展開 $\cos(x\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \xi^{2k}$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \xi^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^{2k}]
\end{aligned}
$$

標準正規変数の特性関数No2

- 標準正規変数 X：

標準正規変数の特性関数No2

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

標準正規変数の特性関数No2

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^{2k}] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \Gamma(k + \frac{1}{2})\end{aligned}$$

標準正規変数の特性関数No2

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\begin{aligned} \hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^{2k}] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \Gamma(k + \frac{1}{2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Gamma(k + \frac{1}{2}) &= (k - \frac{1}{2})\Gamma(k - \frac{1}{2}) \\ &= \cdots = (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi} \end{aligned}$$

標準正規変数の特性関数No2

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^{2k}] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \Gamma(k + \frac{1}{2})
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Gamma(k + \frac{1}{2}) &= (k - \frac{1}{2})\Gamma(k - \frac{1}{2}) \\
&= \cdots = (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \cdots \frac{3}{2}\frac{1}{2}\Gamma(\frac{1}{2}) \\
&= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi}
\end{aligned}
$$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \\
&\quad \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1
\end{aligned}
$$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\pi}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1$$

$$\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2k)!}$$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi}$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1$$

$$\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)!} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-1)(2k-2)\cdot 3\cdot 2\cdot 1}$$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \\
&\qquad \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1
\end{aligned}
$$

$$
\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{(2k)!} = \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k(2k-1)(2k-2)\cdot 3\cdot 2\cdot 1}
$$

$$
\frac{1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2} = \frac{1}{2^k k!}
$$

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$
\begin{aligned}
\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1 \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{2^k \cdot k!} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{\xi^2}{2}}
\end{aligned}
$$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$

変数変換と密度関数 No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = \lambda X$：

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = \lambda X$： 密度関数 $\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = \lambda X$： 密度関数 $\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$

$$
\begin{aligned}
P(a \le Y \le b) &= P(\frac{a}{\lambda} \le X \le \frac{b}{\lambda}) \\
&= \int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} f(x)dx \\
&= \int_a^b f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} dy
\end{aligned}
$$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = X + m$：

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = X + m$： 密度関数 $f(y - m)$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = X + m$： 密度関数 $f(y - m)$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = X + m$： 密度関数 $f(y - m)$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$ 確率密度 $\frac{1}{\sigma} \cdot f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)$

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = X + m$： 密度関数 $f(y-m)$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$ 確率密度 $\frac{1}{\sigma} \cdot f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}dz = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma x+m)\xi} \cdot f(x)dx$$

$$= e^{im\xi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x\xi} \cdot f(x)dx = e^{im\xi}\hat{f}(\sigma\xi)$$

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X:

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X：密度関数 $N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X： 密度関数 $N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
  特性関数 $\varphi_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X：密度関数 $N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
  特性関数 $\varphi_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$（ただし $\sigma > 0$）

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X：密度関数 $N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
  特性関数 $\varphi_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$（ただし $\sigma > 0$）
  確率密度 $N(z) = \frac{1}{\sigma} N_0(\frac{z-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1\sigma \cdot e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}}$

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X：密度関数 $N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
  特性関数 $\varphi_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$（ただし $\sigma > 0$）
  確率密度 $N(z) = \frac{1}{\sigma} N_0(\frac{z-m}{\sigma}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1\sigma \cdot e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}}$
  特性関数 $\varphi_Z(\xi) = e^{im\xi} N_X(\sigma\xi) = e^{im\xi} e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i,\sigma_i^2}$$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i, \sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i,\sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
  $\varphi_Z(\xi) = \varphi_{X_1}(\xi) \cdots \varphi_{X_n}(\xi)$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i, \sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$\varphi_Z(\xi) = \varphi_{X_1}(\xi) \cdots \varphi_{X_n}(\xi)$$
$$= e^{im_1\xi} e^{-\frac{\sigma_1^2 \xi^2}{2}} \cdots e^{im_n\xi} e^{-\frac{\sigma_n^2 \xi^2}{2}}$$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i, \sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\xi) &= \varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi)\\ &= e^{im_1\xi}e^{-\frac{\sigma_1^2\xi^2}{2}}\cdots e^{im_n\xi}e^{-\frac{\sigma_n^2\xi^2}{2}}\\ &= e^{i(m_1+\cdots+m_n)\xi}e^{-\frac{(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i, \sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\xi) &= \varphi_{X_1}(\xi) \cdots \varphi_{X_n}(\xi) \\ &= e^{im_1\xi} e^{-\frac{\sigma_1^2 \xi^2}{2}} \cdots e^{im_n\xi} e^{-\frac{\sigma_n^2 \xi^2}{2}} \\ &= e^{i(m_1+\cdots+m_n)\xi} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

- 特性関数の一意性から

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i, \sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\xi) &= \varphi_{X_1}(\xi) \cdots \varphi_{X_n}(\xi) \\ &= e^{im_1\xi} e^{-\frac{\sigma_1^2 \xi^2}{2}} \cdots e^{im_n\xi} e^{-\frac{\sigma_n^2 \xi^2}{2}} \\ &= e^{i(m_1+\cdots+m_n)\xi} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

- 特性関数の一意性から

$$Z \sim N_{m, \sigma^2}$$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \cdots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i,\sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$\begin{aligned}\varphi_Z(\xi) &= \varphi_{X_1}(\xi)\cdots\varphi_{X_n}(\xi) \\ &= e^{im_1\xi}e^{-\frac{\sigma_1^2\xi^2}{2}}\cdots e^{im_n\xi}e^{-\frac{\sigma_n^2\xi^2}{2}} \\ &= e^{i(m_1+\cdots+m_n)\xi}e^{-\frac{(\sigma_1^2+\cdots+\sigma_n^2)\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

- 特性関数の一意性から

$$Z \sim N_{m,\sigma^2}$$

$$m = m_1 + \cdots + m_n, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \cdots + \sigma_n^2$$