

独立な指数変数の和（復習）

- 指数分布 Exp_λ : 確率密度関数 ($\lambda > 0$)

$$f(x) := \lambda e^{-\lambda x} Y(x)$$

- $X_i \sim \text{Exp}_\lambda$ 独立な確率変数 ($i = 1, 2, \dots, n$)
 $Z = X_1 + \dots + X_n$ の密度
$$h(z) = \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} \cdot e^{-\lambda z}$$

Γ 分布について

- $X_i \sim \text{Exp}_\lambda$ が独立とする。
 $Z = X_1 + \dots + X_n$ の確率密度
$$Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$$
- その一般化 Γ 分布 : 確率密度
$$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$$

Γ 関数（復習）

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$
- 性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $\Gamma(1) = 1$
- $\Gamma(n+1) = n!$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\ &= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\ &= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy \end{aligned}$$

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt = z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$$

$$\text{ただし } I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

ベータ関数

- 正数 $\lambda, \mu > 0$ に対してベータ関数

$$B(\lambda, \mu) := \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

$$B(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda + \mu)}$$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$$

$$\text{ただし } I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

$$\int_0^{+\infty} h(z) dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dz = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$$

$$\longrightarrow I = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$$

$$\bullet h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu)} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$$

標準正規分布と Γ 分布

- 標準正規変数 X : 密度関数

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

- $Y = X^2$ の確率密度は? $0 \leq a \leq b$ のとき $P(a \leq Y \leq b)$

$$= P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b}) + P(-\sqrt{b} \leq X \leq -\sqrt{a})$$

$$= 2P(\sqrt{a} \leq X \leq \sqrt{b})$$

$$= 2 \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{t}{2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} dt$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}} dt$$

正規変数と Γ 分布 NO2

- X 標準正規変数 $\rightarrow$ 確率変数 $Y = X^2$
 Y の確率密度 $g(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot t^{\frac{1}{2}-1} e^{-\frac{t}{2}}$
 $\alpha = \frac{1}{2}, \lambda = \frac{1}{2}$ の Γ 変数 $\rightarrow$ 自由度 0 の χ^2 分布

確率変数の特性関数 (NO3) Le 02 Décembre - p.10/17

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数 X : 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
- X の特性関数
Taylor 展開 $\cos(x\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \xi^{2k}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(x\xi) e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} \xi^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^{2k}]\end{aligned}$$

確率変数の特性関数 (NO3) Le 02 Décembre - p.12/17

χ^2 分布

- X_i 独立な標準正規変数 ($i = 1, 2, \dots, n$)
 $Y_i = X_i^2$ 独立となる
- $Z = Y_1 + \dots + Y_n$
 $\lambda = \frac{1}{2}, \alpha = \frac{n}{2}$ の Γ 変数
これを自由度 $(n-1)$ の χ^2 分布とよぶ

確率変数の特性関数 (NO3) Le 02 Décembre - p.11/17

標準正規変数の特性関数 No2

- 標準正規変数 X : 密度関数 $N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot E[X^{2k}] \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \Gamma(k + \frac{1}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Gamma(k + \frac{1}{2}) &= (k - \frac{1}{2}) \Gamma(k - \frac{1}{2}) \\ &= \dots = (k - \frac{1}{2})(k - \frac{3}{2}) \dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma(\frac{1}{2}) \\ &= \frac{(2k-1)(2k-3) \dots 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\pi}\end{aligned}$$

確率変数の特性関数 (NO3) Le 02 Décembre - p.13/17

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^k \\ &\quad \cdot \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2^k} \sqrt{\pi} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1 \\ \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{(2k)!} &= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1}{2k(2k-2)(2k-4)\cdots 4 \cdot 2} \\ &= \frac{1}{2^k k!}\end{aligned}$$

確率変数の特性関数 (NO3)Le 02 Décembre - p.14/17

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = \lambda X$: 密度関数 $\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{y}{\lambda}\right)$

$$\begin{aligned}P(a \leq Y \leq b) &= P\left(\frac{a}{\lambda} \leq X \leq \frac{b}{\lambda}\right) \\ &= \int_{\frac{a}{\lambda}}^{\frac{b}{\lambda}} f(x) dx \\ &= \int_a^b f\left(\frac{y}{\lambda}\right) \frac{1}{\lambda} dy\end{aligned}$$

確率変数の特性関数 (NO3)Le 02 Décembre - p.16/17

標準正規変数の特性関数

- 標準正規変数の特性関数

$$\begin{aligned}\hat{f}(\xi) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot (2k-1)(2k-3)\cdots 3 \cdot 1 \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{2^k \cdot k!} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} \left(-\frac{\xi^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{\xi^2}{2}}\end{aligned}$$

確率変数の特性関数 (NO3)Le 02 Décembre - p.15/17

変数変換と密度関数No1

- 確率変数 $X \sim f(x)$
- 確率変数 $Y = X + m$: 密度関数 $f(y - m)$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$ 確率密度 $\frac{1}{\sigma} \cdot f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right)$

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f\left(\frac{z-m}{\sigma}\right) \frac{1}{\sigma} dz &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(\sigma x+m)\xi} \cdot f(x) dx \\ &= e^{im\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma x\xi} \cdot f(x) dx = e^{im\xi} \hat{f}(\sigma\xi)\end{aligned}$$

確率変数の特性関数 (NO3)Le 02 Décembre - p.17/17

正規分布の特性関数

- 標準正規変数 X : 密度関数 $N_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$
特性関数 $\varphi_X(\xi) = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$
- 確率変数 $Z = \sigma X + m$ (ただし $\sigma > 0$)
確率密度 $N(z) = \frac{1}{\sigma} N_0\left(\frac{z-m}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} \cdot e^{-\frac{(z-m)^2}{2\sigma^2}}$
特性関数 $\varphi_Z(\xi) = e^{im\xi} N_X(\sigma\xi) = e^{im\xi} e^{-\frac{\sigma^2\xi^2}{2}}$

独立な正規変数の和

- 独立な正規変数 $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$X_i \sim N_{m_i, \sigma_i^2}$$

- $Z = X_1 + X_2 + \dots + X_n$
 $\varphi_Z(\xi) = \varphi_{X_1}(\xi) \cdots \varphi_{X_n}(\xi)$
 $= e^{im_1\xi} e^{-\frac{\sigma_1^2\xi^2}{2}} \cdots e^{im_n\xi} e^{-\frac{\sigma_n^2\xi^2}{2}}$
 $= e^{i(m_1+\dots+m_n)\xi} e^{-\frac{(\sigma_1^2+\dots+\sigma_n^2)\xi^2}{2}}$

- 特性関数の一意性から

$$Z \sim N_{m, \sigma^2}$$

$$m = m_1 + \dots + m_n, \quad \sigma^2 = \sigma_1^2 + \dots + \sigma_n^2$$