確率変数の特性関数

戸瀬　信之

指数分布

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

指数分布

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

- 期待値 $E[X] = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$

指数分布

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

- 期待値 $E[X] = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$= \int_0^{+\infty} x \left(-e^{-\lambda x}\right)' dx = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx$$

$$= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda}$$

指数分布

- 指数分布 Exp_λ：確率密度関数

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

- 期待値 $E[X] = \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$

$$\begin{aligned} &= \int_0^{+\infty} x \left(-e^{-\lambda x}\right)' dx = \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

- 高次の Moment $E[X^k]$ を計算するために Γ 関数を用いる

Γ 関数

- 定義

Γ 関数

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$

Γ関数

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- 性質

Γ関数

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- 性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),\ \Gamma(1) = 1$

Γ 関数

- 定義 $\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1}e^{-t}dt$
- 性質 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s),\ \Gamma(1) = 1$

$$
\begin{aligned}
E[X^k] &= \int_0^{+\infty} x^k \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&\qquad\qquad (y = \lambda x \text{ と変数変換}) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^k \cdot \lambda e^{-y} \frac{1}{\lambda} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^k} \cdot \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^k}\Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}
\end{aligned}
$$

指数変数の特性関数

- 特性関数

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$
- 両辺を微分

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$
- 両辺を微分
  $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} ixe^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i}{(\lambda - i\xi)^2}$

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$
- 両辺を微分
  $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} ixe^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i}{(\lambda - i\xi)^2}$
- 両辺を微分

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$
- 両辺を微分
  $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} ixe^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i}{(\lambda - i\xi)^2}$
- 両辺を微分
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^2 x^2 e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^2 \cdot 2}{(\lambda - i\xi)^3}$

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$
- 両辺を微分
  $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} ix e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i}{(\lambda - i\xi)^2}$
- 両辺を微分
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^2 x^2 e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^2 \cdot 2}{(\lambda - i\xi)^3}$
- 一般には

指数変数の特性関数

- 特性関数 $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{i\xi x} e^{\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - i\xi}$
- 両辺を微分
  $\frac{d}{d\xi}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} ix e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i}{(\lambda - i\xi)^2}$
- 両辺を微分
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^2 \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^2 x^2 e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^2 \cdot 2}{(\lambda - i\xi)^3}$
- 一般には
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$

指数変数の高次のMoment

- 一般に

指数変数の高次の **Moment**

- 一般に
$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1}\hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1}x^{n-1}e^{i\xi x}e^{-\lambda x}dx = \lambda \frac{i^{n-1}\cdot(n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$

指数変数の高次の Moment

- 一般に
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1}\hat{f}(\xi) = \lambda\int_0^{+\infty} i^{n-1}x^{n-1}e^{i\xi x}e^{-\lambda x}dx = \lambda\frac{i^{n-1}\cdot(n-1)!}{(\lambda-i\xi)^n}$
- $\xi = 0$ を代入する

指数変数の高次の **Moment**

- 一般に
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1}\hat{f}(\xi)=\lambda\int_0^{+\infty}i^{n-1}x^{n-1}e^{i\xi x}e^{-\lambda x}dx=\lambda\frac{i^{n-1}\cdot(n-1)!}{(\lambda-i\xi)^n}$
- $\xi=0$ を代入する
  $\lambda i^{n-1}\int_0^{+\infty}x^{n-1}e^{-\lambda x}dx=\lambda\frac{i^{n-1}\cdot(n-1)!}{\lambda^n}$

指数変数の高次の **Moment**

- 一般に
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$
- $\xi = 0$ を代入する
  $\lambda i^{n-1} \int_0^{+\infty} x^{n-1} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{\lambda^n}$

$$E[X^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}}$$

指数変数の高次の**Moment**

- 一般に
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1}\hat{f}(\xi) = \lambda\int_0^{+\infty} i^{n-1}x^{n-1}e^{i\xi x}e^{-\lambda x}dx = \lambda\frac{i^{n-1}\cdot(n-1)!}{(\lambda-i\xi)^n}$
- $\xi = 0$ を代入する
  $\lambda i^{n-1}\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-\lambda x}dx = \lambda\frac{i^{n-1}\cdot(n-1)!}{\lambda^n}$

$$E[X^{n-1}] = \frac{(n-1)!}{\lambda^{n-1}}$$

- 後に、独立な指数変数の確率密度関数を求めるのに用いる

独立な指数変数の和

- 独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots\ ,X_n$

独立な指数変数の和

- 独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n$
  $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda \quad (i=1,2,\cdots,n)$

独立な指数変数の和

- 独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n$
  $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

独立な指数変数の和

- 独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n$
  $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- 問題 Z_n の確率密度関数を求める

独立な指数変数の和

- 独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n$
  $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$
  $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- 問題 Z_n の確率密度関数を求める
- $n = 2$

独立な指数変数の和

- 独立な確率変数 $X_1,\ X_2,\ \cdots,X_n$
  $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda \quad (i=1,2,\cdots,n)$
  $Z_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$
- 問題 Z_n の確率密度関数を求める
- $n=2$

$$
\begin{aligned}
f_2(z_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_2-t)f(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(z_2-t)\lambda e^{-\lambda(z_2-t)} \cdot Y(t)\lambda e^{-\lambda t}dt \\
&= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z_2} \int_0^{z_2} dt = \lambda^2 e^{-\lambda z_2} z_2 & (z_2 \geq 0) \\ 0 & (z_2 < 0) \end{cases}
\end{aligned}
$$

独立な指数変数の和 (N02)

- $n = 3$

独立な指数変数の和 (N02)

- $n = 3$ $Z_2 = X_1 + X_2$ と X_3 は独立に注意（後述）

独立な指数変数の和 (N02)

- $n = 3$ $Z_2 = X_1 + X_2$ と X_3 は独立に注意（後述） Z_3 の確率密度 $f_3(z_3)$

独立な指数変数の和 (N02)

- $n=3$ $Z_2 = X_1 + X_2$ と X_3 は独立に注意（後述） Z_3 の確率密度 $f_3(z_3)$

$$f_3(z_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z_3 - t) f(t) dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(z_3 - t)\lambda^2 (z_3 - t) e^{-\lambda(z_3 - t)} \cdot Y(t)\lambda e^{-\lambda t} dt$$

$$= \begin{cases} \lambda^3 e^{-\lambda z_3} \int_0^{z_3} (z_3 - t) dt = \lambda^3 e^{-\lambda z_3} z_3^2 & (z_3 \geq 0) \\ 0 & (z_3 < 0) \end{cases}$$

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

- 次に、特性関数を用いる計算を紹介

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

- 次に、特性関数を用いる計算を紹介

$\hat{f}_n(\xi) = \left(\hat{f}(\xi)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\xi}\right)^n$

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

- 次に、特性関数を用いる計算を紹介

$\hat{f}_n(\xi) = \left(\hat{f}(\xi)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\xi}\right)^n$

$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

- 次に、特性関数を用いる計算を紹介
  $\hat{f}_n(\xi) = \left(\hat{f}(\xi)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\xi}\right)^n$
  $\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$
  両辺を $\lambda^{n-1}/(i^{n-1} \cdot (n-1)!)$ 倍

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

- 次に、特性関数を用いる計算を紹介

$\hat{f}_n(\xi) = \left(\hat{f}(\xi)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\xi}\right)^n$

$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$

両辺を $\lambda^{n-1}/(i^{n-1} \cdot (n-1)!)$ 倍

$\int_0^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1!)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{(\lambda - i\xi)^n}$

独立な指数変数の和 (N03)

- 一般の場合 Z_n の確率密度 $f_n(z_n)$

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

- 次に、特性関数を用いる計算を紹介
$\hat{f}_n(\xi) = \left(\hat{f}(\xi)\right)^n = \left(\frac{\lambda}{\lambda - i\xi}\right)^n$
$\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{n-1} \hat{f}(\xi) = \lambda \int_0^{+\infty} i^{n-1} x^{n-1} e^{i\xi x} e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{i^{n-1} \cdot (n-1)!}{(\lambda - i\xi)^n}$
両辺を $\lambda^{n-1}/(i^{n-1} \cdot (n-1)!)$ 倍
$\int_0^{+\infty} e^{i\xi x} \frac{\lambda^n x^{n-1}}{(n-1!)} e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda^n}{(\lambda - i\xi)^n}$
- 次の特性関数の一意性によって、上の結果が従う。

特性関数の一意性

- $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は2つの密度関数とする。

特性関数の一意性

- $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は 2 つの密度関数とする。
  $\hat{f}_1 \equiv \hat{f}_2$

特性関数の一意性

- $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は 2 つの密度関数とする。
  $\hat{f}_1 \equiv \hat{f}_2 \qquad \Rightarrow$

特性関数の一意性

- $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は 2 つの密度関数とする。
  $\hat{f}_1 \equiv \hat{f}_2 \quad \Rightarrow$
  f_1 と f_2 は同じ確率を与える

特性関数の一意性

- $f_1(x)$ と $f_2(x)$ は 2 つの密度関数とする。
  $\hat{f}_1 \equiv \hat{f}_2 \quad\quad \Rightarrow$
  f_1 と f_2 は同じ確率を与える

$$\int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b f_2(x)dx$$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布：

Γ分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ分布： 確率密度

Γ分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ分布： 確率密度
  $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布： 確率密度
  $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

Γ 分布について

- $X_i \sim \mathrm{Exp}_\lambda$ が独立とする。
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の確率密度
  $Y(z) \cdot \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)! \cdot e^{-\lambda z}}$
- その一般化 Γ 分布： 確率密度
  $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z f(z-y) g(y) dy \\ &= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\ &= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy \end{aligned}$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\ &= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\ &= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy \end{aligned}$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \int_0^z f(z-y)g(y)dy$$

$$= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y) g(y) dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和

- X の確率密度 $f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$
- Y の確率密度 $g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$
- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$
\begin{aligned}
h(z) &= \int_0^z f(z-y) g(y) dy \\
&= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\
&= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy
\end{aligned}
$$

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt =$
$z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt =$
$z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$

$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

独立なガンマ変数の和 No2

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy$$

$y = zt$ と変数変換

$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt =$
$z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$

$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z) dz = 1$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z) dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$

独立なガンマ変数の和 **No3**

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z)dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$
- $\longrightarrow I = \frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$

独立なガンマ変数の和 No3

- X と Y が独立のとき $Z = X + Y$ の密度関数を求める
  $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$
  ただし $I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$
- $\int_0^{+\infty} h(z)dz = 1 \quad \int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z} dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$
- $\longrightarrow I = \frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$
- $h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu)} z^{\lambda++\mu-1} e^{-\alpha z}$

ベータ関数

- 正数 $\lambda, \mu > 0$ に対してベータ関数

ベータ関数

- 正数 $\lambda,\ \mu > 0$ に対してベータ関数

$$B(\lambda, \mu) := \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$$

ベータ関数

- 正数 $\lambda,\ \mu > 0$ に対してベータ関数

$$B(\lambda, \mu) := \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu} dt$$

$$B(\lambda, \mu) = \frac{\Gamma(\lambda) \cdot \Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$$