第3章　確率変数

3.1　指数分布・ガンマ分布

3.1.1　指数分布

確率変数 X が正数 λ をパラメータとする指数分布に従うとは、確率密度関数

$$f(x) := \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

に従うときです。$f(x)$ が確率密度関数であるのは

$$f(x) \geq 0$$

であることと

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{0}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = 0 - (-1) = 1$$

から分かります。この確率変数 X の期待値分散を求めましょう。

$$\begin{aligned} E[X] &= \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x \cdot \left(-e^{-\lambda x}\right)' dx \\ &= \left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

と X の期待値は計算されます。X の分散を求めるために X^2 の期待値を計算すると

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 \cdot \left(-e^{-\lambda x}\right)' dx \\ &= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2x e^{-\lambda x} dx \\ &= \frac{2}{\lambda} \int_0^{+\infty} x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda} E[X] = \frac{2}{\lambda^2} \end{aligned}$$

となります。このことから

$$V(X) = E[X^2] - (E[X])^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

となります。X の k 次のモーメント $E[X^k]$ を計算するために次の節でガンマ関数を導入します。

3.1.2 ガンマ関数

正数 $s > 0$ に対してガンマ関数

$$\Gamma(s) := \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$$

を定義します。この関数の意味は徐々に説明します。

まず基本的な公式を導きます。部分積分を用いて得られる

$$\begin{aligned}\gamma(s+1) &= \int_0^{+\infty} t^s e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^s \left(-e^{-t}\right)' dt \\ &= \left[-t^s e^{-t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} (t^s)' e^{-t} dt \\ &= s\Gamma(s)\end{aligned}$$

によって公式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

が示されます。また

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-t} dt = \left[-e^{-t}\right]_0^{+\infty} = 1$$

にも注意します。すると非負整数 $n \in \mathbb{Z}_+$ に対して

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= \cdots = n(n-1)(n-2)\cdots 2\Gamma(2) \\ &= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1\Gamma(1) = n!\end{aligned}$$

を得ます。

さて、パラメータ $\lambda > 0$ の指数分布従う確率変数 X を考えて、その k 次の

モーメントを計算します。すなわち

$$\begin{aligned}
E[X^k] &= \int_0^{+\infty} x^k \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx \\
&\qquad (y = \lambda x \text{ と変数変換}) \\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\lambda}\right)^k \cdot \lambda e^{-y} \frac{1}{\lambda} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^k} \cdot \int_0^{+\infty} y^k e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{\lambda^k} \Gamma(k+1) = \frac{k!}{\lambda^k}
\end{aligned}$$

を得ます。ここで、X の k 次のモーメント $E[X^k]$ を別の方法で計算するためにモーメント母関数という概念を導入します。

3.1.3 モーメント母関数

確率密度関数 $f(x)$ を持つ確率変数 X が非負に値を取るとします。すなわち

$$f(x) \equiv 0 \quad (x < 0)$$

が成立するとします。このとき

$$\phi(\theta) := E[e^{\theta X}] = \int_0^{+\infty} f(x) e^{\theta x} dx$$

を θ の関数とみるとき、モーメント母関数と呼びます。例えば X がパラメータ $\lambda > 0$ の指数分布に従うとき、

$$\begin{aligned}
E[e^{\theta X}] &= \int_0^{+\infty} e^{\theta x} \cdot \lambda e^{-\lambda x} \\
&= \lambda \int_0^{+\infty} e^{(\theta - \lambda) x} dx
\end{aligned}$$

となりますが、積分が収束するのは $\theta - \lambda < 0$ すなわち

$$\theta < \lambda$$

のときです。このとき積分は

$$\phi(\theta) = E[e^{\theta X}] = \left[\lambda \frac{1}{\theta - \lambda} e^{(\theta - \lambda) x}\right]_0^{+\infty} = \frac{\lambda}{\lambda - \theta}$$

と計算されます。

ここで定義したモーメント母関数が有用であることを示します。一般に θ について微分可能な関数 $F(x, \theta)$ が条件

$$\int_0^{+\infty} |F(x,\theta)| dx < +\infty, \quad \int_0^{+\infty} \left| \frac{\partial}{\partial \theta} F(x,\theta) \right| dx < +\infty$$

を満たすとき

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_0^{+\infty}F(x,\theta)dx=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}F(x,\theta)dx$$

と積分と微分が交換します。この事実を繰り返して適用できると仮定すると

$$\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^k\phi(\theta)=\int_0^{+\infty}x^k e^{\theta x}f(x)dx$$

が従います。例えば、上にあるようにパラメータ $\lambda>0$ の指数分布に従う確率変数の場合は、上の議論が $\theta<\lambda$ において適用可能で

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}x^k e^{\theta x}f(x)dx &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^k\phi(\theta)\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial\theta}\right)^k\frac{\lambda}{\lambda-\theta}=\frac{\lambda\cdot k!}{(\lambda-\theta)^{k+1}}\end{aligned}$$

が $\theta<\lambda$ において成立します。ここで $\theta=0$ を代入すると

$$\begin{aligned}E[X^k] &= \int_0^{+\infty}x^k f(x)dx\\ &= \frac{\lambda\cdot k!}{\lambda^{k+1}}=\frac{k!}{\lambda^k}\end{aligned}$$

が従います。

3.1.4 独立な確率変数の和

確率変数 X と Y が独立で、X が確率密度関数 $f(x)$ を持ち、Y が確率密度関数 $g(y)$ を持つとします。このとき 2 つの確率変数の和 $Z=X+Y$ は確率密度関数

$$h(z)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(z-y)g(y)dx$$

を持ちます。

いま確率変数 $X_1,\cdots,X_n$ は独立で、全てパラメータ $\lambda>0$ の指数分布に従うとします。$Z_n=X_1+\cdots+X_n$ の確率密度関数 $f_n(x)$ を求めましょう。まず $n=2$ の場合を考えます。そのためにまず Heavise 関数

$$Y(x):=\begin{cases}1 & (x\leq 0)\\ 0 & (x<0)\end{cases}$$

を定めます。このとき X_i の確率密度関数は

$$f(x_i)=Y(x_i)\lambda e^{-\lambda x_i}$$

と記述されます。これを用いると

$$\begin{aligned} f_2(z_2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(z_2-t)f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(z_2-t)\lambda e^{-\lambda(z_2-t)} \cdot Y(t)\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \begin{cases} \lambda^2 e^{-\lambda z_2} \int_0^{z_2} dt = \lambda^2 e^{-\lambda z_2} z_2 & (z_2 \geq 0) \\ 0 & (z_2 < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

と計算されます。ここで

$$Y(z_2-t)Y(t) \begin{cases} 1 & (t \geq 0 \text{AND } t \leq z_2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

に注意しましょう。また $z_2 < 0$ のときは

$$Y(z_2-t)Y(t) \equiv 0$$

が常に成立することも用います。さらに Z_3 の確率密度関数は

$$\begin{aligned} f_3(z_3) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(z_3-t)f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} Y(z_3-t)\lambda^2(z_3-t)e^{-\lambda(z_3-t)} \cdot Y(t)\lambda e^{-\lambda t}dt \\ &= \begin{cases} \lambda^3 e^{-\lambda z_3} \int_0^{z_3} (z_3-t)dt = \lambda^3 e^{-\lambda z_3} \frac{z_3^2}{2!} & (z_3 \geq 0) \\ 0 & (z_3 < 0) \end{cases} \end{aligned}$$

と計算されます。これを繰り返すと Z_n の確率密度関数は

$$f_n(z_n) = \frac{\lambda^n z_n^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z_n}$$

であることが示されます。このことは、後に特性関数を用いて別の計算法を紹介します。また、この確率密度関数に従う確率分布は、次の第 3.2 節で紹介するガンマ分布の特別な場合です。

3.2 ガンマ分布

正数 $\lambda > 0$ と $\alpha > 0$ を固定して関数

$$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$$

を確率密度関数にもつ確率分布をガンマ分布と呼びます。この $f(x)$ が本当に確率分布であるのは

$$
\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} f(x)dx &= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}dx \\
&= y=\alpha x \text{ と変数変換} \\
&= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\lambda-1} e^{-y}\frac{1}{\alpha}dy \\
&= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} y^{\lambda-1}e^{-y}dy
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\cdot\Gamma(\lambda) = 1
$$

から従います。次に確率変数 X がこのガンマ分布に従うとして、期待値を求めます。

$$
\begin{aligned}
E[X] &= \int_0^{+\infty} xf(x)dx \\
&= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} x^{\lambda}e^{-\alpha x}dx \\
&= y=\alpha x \text{ と変数変換} \\
&= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\lambda} e^{-y}\frac{1}{\alpha}dy \\
&= \frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} y^{\lambda}e^{-y}dy \\
&= \frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(\lambda)}\cdot\Gamma(\lambda+1) = \frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(\lambda)}\cdot\lambda\Gamma(\lambda) = \frac{\lambda}{\alpha}
\end{aligned}
$$

から

$$
E[X] = \frac{\lambda}{\alpha}
$$

を得ます。さらに X の分散を計算するために X の 2 次のモーメントを計算する。

$$
\begin{aligned}
E[X^2] &= \int_0^{+\infty} x^2f(x)dx \\
&= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} x^{\lambda+1}e^{-\alpha x}dx \\
&= y=\alpha x \text{ と変数変換} \\
&= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\lambda+1} e^{-y}\frac{1}{\alpha}dy \\
&= \frac{1}{\alpha^2\cdot\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} y^{\lambda+1}e^{-y}dy \\
&= \frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(\lambda)}\cdot\Gamma(\lambda+2) = \frac{1}{\alpha\cdot\Gamma(\lambda)}\cdot(\lambda+1)\lambda\Gamma(\lambda) = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\alpha}
\end{aligned}
$$

から

$$E[X^2] = \frac{\lambda(\lambda+1)}{\alpha}$$

を得ます。さらに X の分散は

$$V[X] = E[X^2] - EX^2 = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

と計算されます。

演習 3.1. X の k 次のモーメントを計算しましょう。

ガンマ変数の和　確率変数 X はパラメータ $\lambda > 0$ と $\alpha > 0$ のガンマ分布に従うとします。また、確率変数 Y はパラメータ $\mu > 0$ と $\alpha > 0$ のガンマ分布に従うとします。以下では、X と Y が独立であると仮定して、確率変数 $Z = X + Y$ の確率密度関数を求めます。Z の確率密度関数 $h(z)$ は $z \geq 0$ のとき X の確率密度関数

$$f(x) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)} \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x} Y(x)$$

と Y の確率密度

$$g(y) = \frac{\alpha^\mu}{\Gamma(\mu)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} Y(y)$$

を用いて、

$$\begin{aligned} h(z) &= \int_0^z f(z-y)g(y)dy \\ &= \frac{\alpha^\lambda \cdot \alpha^\mu}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} e^{-\alpha(z-y)} \cdot y^{\mu-1} e^{-\alpha y} dy \\ &= \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot e^{-\alpha z} \int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy \end{aligned}$$

となります。さらに等式の最後に現れる定積分を $y = zt$ と変数変換すると

$$\int_0^z (z-y)^{\lambda-1} y^{\mu-1} dy = \int_0^1 (z-zt)^{\lambda-1} (zt)^{\mu-1} z dt = z^{\lambda+\mu-1} \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

となり、

$$I = \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1} t^{\mu-1} dt$$

と定めると $h(z)$ は

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda)\Gamma(\mu)} \cdot I \cdot z^{\lambda+\mu-1} e^{-\alpha z}$$

と計算されます。他方

$$\int_0^{+\infty} h(z)dz = 1$$

と

$$\int_0^{+\infty} z^{\lambda+\mu-1}e^{-\alpha z}dx = \frac{\Gamma(\lambda+\mu)}{\alpha^{\lambda+\mu}}$$

から

$$I = \frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)} \tag{3.1}$$

を得ます。以上から

$$h(z) = \frac{\alpha^{\lambda+\mu}}{\Gamma(\lambda+\mu)}z^{\lambda+\mu-1}e^{-\alpha z}$$

が示されました。すなわち Z はパラメータ $\lambda+\mu$ と α のガンマ分布に従うことが示されました。

ベータ関数　正数 $\lambda,\ \mu>0$ に対して、、ベータ関数を

$$B(\lambda,\mu) := \int_0^1 (1-t)^{\lambda-1}t^{\mu-1}dt$$

と定義します。このとき、(3.1) から

$$B(\lambda,\mu) = \frac{\Gamma(\lambda)\cdot\Gamma(\mu)}{\Gamma(\lambda+\mu)}$$

を得ます。