確率変数の特性関数

戸瀬　信之

復習–特性関数とは

- 復習　確率変数 X の特性関数とは

$$\varphi(\xi) := E[e^{iX\xi}]$$

復習–特性関数とは

- 復習　確率変数 X の特性関数とは

$$\varphi(\xi) := E[e^{iX\xi}]$$

- X の確率密度が確率密度関数 $f(x)$ を持つ場合

$$\varphi(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ix\xi}dx$$

独立な確率変数の和の特性関数

- 独立な確率変数 X と Y、その和 $Z = X + Y$

$$X \sim f(x), \quad Y \sim g(y)$$

のとき $Z = X + Y$ の確率密度関数

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy$$

独立な確率変数の和の特性関数

- 独立な確率変数 X と Y、その和 $Z = X + Y$

$$X \sim f(x), \quad Y \sim g(y)$$

のとき $Z = X + Y$ の確率密度関数

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy$$

- Z の特性関数 $\varphi(\xi)$
X の特性関数 $\varphi_1(\xi)$、Y の特性関数 $\varphi_2(\xi)$

$$\Rightarrow \quad \varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) \cdot \varphi_2(\xi)$$

証明

- その証明

証明

- その証明
  $\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$

証明

- その証明
  $\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$
  $= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \right) dz$

証明

- その証明
$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \right) dz$
$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f(z-y)dz \right) dy$

証明

- その証明

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \right) dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} \cdot e^{iy\xi} f(z-y)dz \right) dy$$

証明

- その証明
$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \right) dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} \cdot e^{iy\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} f(z-y)dz \right) dy$$

証明

- その証明

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \right) dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} \cdot e^{iy\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\cdot\xi} f(t)dt \right) dy$$

証明

- その証明

$$\hat{h}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \cdot h(z)dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)g(y)dy \right) dz$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{iz\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} \cdot e^{iy\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i(z-y)\cdot\xi} f(z-y)dz \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{it\cdot\xi} f(t)dt \right) dy$$
$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{iy\xi} g(y) \left(\hat{f}(\xi) \right) dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

一般に

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数

一般に

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i の特性関数　$\varphi_i(\xi)$

一般に

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i の特性関数　$\varphi_i(\xi)$
  $Z = X_1 + \cdots + X_n$ の特性関数
  $$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi) \cdots \varphi_n(\xi)$$

応用

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数

応用

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i 0 と 1 に値をとる確率変数

$$P(X_i = k) = \begin{cases} q = (1-p) & (k = 0) \\ p & (k = 1) \end{cases}$$

応用

- $X_1, \cdots, X_n$ ：独立な確率変数
- X_i 0 と 1 に値をとる確率変数

$$P(X_i = k) = \begin{cases} q = (1-p) & (k=0) \\ p & (k=1) \end{cases}$$

- X_i の特性関数
$\varphi_i(\xi) = E[e^{iX_i\xi}] = qe^{i0\cdot\xi} + pe^{i\xi} = q + pe^{i\xi}$

応用

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i 0 と 1 に値をとる確率変数

$$P(X_i = k) = \begin{cases} q = (1-p) & (k=0) \\ p & (k=1) \end{cases}$$

- X_i の特性関数
  $\varphi_i(\xi) = E[e^{iX_i\xi}] = qe^{i0\cdot\xi} + pe^{i\xi} = q + pe^{i\xi}$
- 確率変数　$Z = X_1 + \cdots + X_n$　は何か

応用

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i 0 と 1 に値をとる確率変数

$$P(X_i = k) = \begin{cases} q = (1-p) & (k=0) \\ p & (k=1) \end{cases}$$

- X_i の特性関数
  $\varphi_i(\xi) = E[e^{iX_i\xi}] = qe^{i0\cdot\xi} + pe^{i\xi} = q + pe^{i\xi}$
- 確率変数　$Z = X_1 + \cdots + X_n$　は何か
  2 項分布（$B_{n,p}$) に他ならない

応用

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i 0 と 1 に値をとる確率変数

$$P(X_i = k) = \begin{cases} q = (1-p) & (k=0) \\ p & (k=1) \end{cases}$$

- X_i の特性関数
  $\varphi_i(\xi) = E[e^{iX_i\xi}] = qe^{i0\cdot\xi} + pe^{i\xi} = q + pe^{i\xi}$
- 確率変数　$Z = X_1 + \cdots + X_n$　は何か
  2 項分布（$B_{n,p}$) に他ならない
  特性関数は

$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi)\cdots\varphi_n(\xi) = \left(q + e^{i\xi}p\right)^n$$

応用

- $X_1, \cdots, X_n$：独立な確率変数
- X_i 0 と 1 に値をとる確率変数

$$P(X_i = k) = \begin{cases} q = (1-p) & (k=0) \\ p & (k=1) \end{cases}$$

- X_i の特性関数
$\varphi_i(\xi) = E[e^{iX_i\xi}] = qe^{i0\cdot\xi} + pe^{i\xi} = q + pe^{i\xi}$
- 確率変数　$Z = X_1 + \cdots + X_n$　は何か
2 項分布（$B_{n,p}$) に他ならない
特性関数は
$$\varphi(\xi) = \varphi_1(\xi)\cdots\varphi_n(\xi) = \left(q + e^{i\xi}p\right)^n$$
- X_i の分布をベルヌーイ分布と呼ぶ

特性関数と期待値

- 離散的な確率変数 X

特性関数と期待値

- 離散的な確率変数 X
- 取る値 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$　　（ただし $\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$）
  $P(X = \alpha_i) = p_i$

特性関数と期待値

- 離散的な確率変数 X
- 取る値 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ （ただし $\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$）
  $P(X = \alpha_i) = p_i$
- X の特性関数 $\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{i\alpha_i\xi} p_i$

特性関数と期待値

- 離散的な確率変数 X
- 取る値 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ （ただし $\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$）
  $P(X = \alpha_i) = p_i$
- X の特性関数 $\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{i\alpha_i \xi} p_i$
- もし微分と無限和が交換可能ならば

$$\varphi'(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sqrt{-1}\alpha_j e^{i\alpha_j \xi} p_j$$

特性関数と期待値

- 離散的な確率変数 X
- 取る値 $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$ （ただし $\alpha_i \neq \alpha_j \quad (i \neq j)$）
  $P(X = \alpha_i) = p_i$
- X の特性関数 $\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{i\alpha_i \xi} p_i$
- もし微分と無限和が交換可能ならば

$$\varphi'(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \sqrt{-1}\alpha_j e^{i\alpha_j \xi} p_j$$

$$\varphi'(0) = \sqrt{-1} \sum_{j=0}^{+\infty} \alpha_j p_j = \sqrt{-1} E[X]$$

特性関数と期待値**No2**

- 微分と無限和が次々と交換できるとすると

特性関数と期待値No2

- 微分と無限和が次々と交換できるとすると

$$\varphi^{(k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sqrt{-1}\alpha_j\right)^k e^{i\alpha_j \xi} p_j$$

特性関数と期待値No2

- 微分と無限和が次々と交換できるとすると

$$\varphi^{(k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sqrt{-1}\alpha_j\right)^k e^{i\alpha_j \xi} p_j$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sqrt{-1}\alpha_j\right)^k p_j = \left(\sqrt{-1}\right)^k E[X^k]$$

特性関数と期待値No2

- 微分と無限和が次々と交換できるとすると

$$\varphi^{(k)}(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sqrt{-1}\alpha_j\right)^k e^{i\alpha_j\xi} p_j$$

$$\varphi^{(k)}(0) = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sqrt{-1}\alpha_j\right)^k p_j = \left(\sqrt{-1}\right)^k E[X^k]$$

- 無限和と微分の交換のための十分条件

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\alpha_j|^k p_j < +\infty$$

解析の準備 No1

- 開区間 (a,b) 上の微分可能な関数列 $f_n(x)$

解析の準備 No1

- 開区間 (a,b) 上の微分可能な関数列 $f_n(x)$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |f_j(x)| < +\infty$$

かつ

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |f_j'(x)| < +\infty$$

解析の準備 No1

- 開区間 (a, b) 上の微分可能な関数列 $f_n(x)$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |f_j(x)| < +\infty$$

かつ

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |f'_j(x)| < +\infty$$

$\Rightarrow$

$$\frac{d}{dx}\sum_{j=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{j=0}^{+\infty} f'_n(x)$$

具体例

- 幾何分布 Ge_p

具体例

- 幾何分布 Ge_p

$$P(X = k) = pq^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

具体例

- 幾何分布 Ge_p

$$P(X=k) = pq^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

- 特性関数　$\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{ik\xi} pq^k = p \sum_{j=0}^{+\infty} \left(e^{i\xi} q\right)^k$

具体例

- 幾何分布 Ge_p

$$P(X=k)=pq^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

- 特性関数 $\varphi(\xi)=\sum_{j=0}^{+\infty} e^{ik\xi}pq^k = p\sum_{j=0}^{+\infty}\left(e^{i\xi}q\right)^k$

$$=\frac{p}{1-qe^{i\xi}}$$

具体例

- 幾何分布 Ge_p

$$P(X = k) = pq^k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots)$$

- 特性関数 $\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{ik\xi} pq^k = p \sum_{j=0}^{+\infty} \left(e^{i\xi} q\right)^k$

$$= \frac{p}{1 - qe^{i\xi}}$$

$$\varphi'(\xi) = \frac{pqe^{i\xi}}{(1 - qe^{i\xi})^2} \cdot \sqrt{-1}$$

具体例

- 幾何分布 Ge_p

$$P(X=k)=pq^k \quad (k=0,1,2,\cdots)$$

- 特性関数 $\varphi(\xi)=\sum_{j=0}^{+\infty} e^{ik\xi}pq^k = p\sum_{j=0}^{+\infty}\left(e^{i\xi}q\right)^k$

$$=\frac{p}{1-qe^{i\xi}}$$

$$\varphi'(\xi)=\frac{pqe^{i\xi}}{(1-qe^{i\xi})^2}\cdot\sqrt{-1}$$

$$\varphi'(0)=\frac{pq}{(1-q)^2}\cdot\sqrt{-1}=\frac{q}{p}\sqrt{-1}=\sqrt{-1}E[X]$$

具体例

- $\varphi''(\xi) = \dfrac{pq^2 \cdot 2e^{i2\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^3} + \dfrac{pqe^{i\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^2}$

具体例

- $$\varphi''(\xi) = \frac{pq^2 \cdot 2e^{i2\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1 - qe^{i\xi})^3} + \frac{pqe^{i\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1 - qe^{i\xi})^2}$$
  $$\varphi''(0) = \frac{pq^2 \cdot 2\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1 - q)^3} + \frac{pq}{(1 - q)^2}$$

具体例

- $$\varphi''(\xi) = \frac{pq^2 \cdot 2e^{i2\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^3} + \frac{pqe^{i\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^2}$$
  $$\varphi''(0) = \frac{pq^2 \cdot 2\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-q)^3} + \frac{pq}{(1-q)^2}$$
  $$= \frac{q(2q+p)}{p^2}$$

具体例

- $$\varphi''(\xi) = \frac{pq^2 \cdot 2e^{i2\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^3} + \frac{pqe^{i\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^2}$$
  $$\varphi''(0) = \frac{pq^2 \cdot 2\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-q)^3} + \frac{pq}{(1-q)^2}$$
  $$= \frac{q(2q+p)}{p^2}$$
- 2 次のモーメント $E[X^2] = \dfrac{2q^2+pq}{p^2}$

具体例

- $$\varphi''(\xi) = \frac{pq^2 \cdot 2e^{i2\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^3} + \frac{pqe^{i\xi}\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-qe^{i\xi})^2}$$
  $$\varphi''(0) = \frac{pq^2 \cdot 2\left(\sqrt{-1}\right)^2}{(1-q)^3} + \frac{pq}{(1-q)^2}$$
  $$= \frac{q(2q+p)}{p^2}$$
- 2 次のモーメント $E[X^2] = \dfrac{2q^2+pq}{p^2}$