

第1章 確率変数とは

1.1 非負整数値の確率変数

1.1.1 2項分布、幾何分布

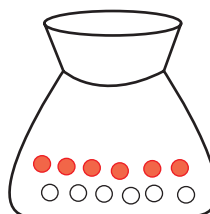
確率変数とは

壺の中に赤玉が N_1 個、白玉が N_2 個入っているとします。このとき壺から玉を取り出しては戻すという試行を n 回繰り返します。赤玉が出る個数を X とすると、 $X = k$ である確率を求めることができます。すなわち

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k q^{n-k}$$

が $X = k$ の確率となります。これは、 n 回取り出すという操作のうちどの k 回に赤玉が出るかという組み合わせの数が ${}_n C_k$ で、そのそれぞれが確率

$$p^k q^{n-k}$$



であるからです。ここで

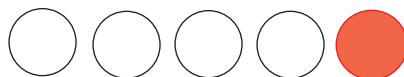
$$p = \frac{N_1}{N}, \quad q = \frac{N_2}{N}$$

としました。ここで全ての確率を足すと1になることに注意しましょう。すなわち

$$\sum_{k=0}^n P(X = k) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k p^k q^{n-k} = (p + q)^n = 1$$

から分かります。このように X の取る値によって確率が定まる変数を確率変数と呼びます。また、この X を2項変数と呼びます。

次に、別の確率変数を紹介します。上の壺から赤玉が出るまで玉を取り出しては戻すという試行を繰り返します。そして赤の玉が出るまでに出た白玉の個数を Y とします。 $Y = k$ であるときは、最初の k 回白玉が出て、 $k + 1$ 回目の試行で赤玉が出るので、確率は



$$P(X = k) = q^k p$$

となります。この場合に全確率が 1 となるのは

$$\sum_{k=0}^{+\infty} P(X = k) = \sum_{k=0}^{+\infty} p q^k = \frac{q}{1-p} = \frac{q}{q} = 1$$

と示すことができます。この確率変数をパラメータ p の幾何変数と呼びます。

以下、確率変数 X と Y を例にとりて、いくつかの概念を紹介していきます。

期待値

次に X の期待値 (expect value) とは

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=0}^n k \cdot P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^n k_n C_k p^k q^{n-k} \end{aligned}$$

を意味します。この値を具体的に求めてみましょう。 $k = 0$ のときは、この最右辺の項は 0 ですから、和は $k = 1$ から取っても同じ値になります。また $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} k_n C_k &= k \cdot \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} \\ &= n \frac{(n-1)!}{(k-1)\{(n-1)-(k-1)\}!} = n_{n-1} C_{k-1} \end{aligned}$$

から得られる

$$k_n C_k = n_{n-1} C_{k-1} \quad (1.1)$$

であることに注意して

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{k=1}^n k_n C_k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=1}^n n_{n-1} C_{k-1} p^k q^{n-k} \\ &\quad (\ell = k - 1 \text{ と変数変換}) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n-1} n_{n-1} C_{\ell} p^{\ell+1} q^{(n-1)-\ell} \\ &= np \sum_{\ell=0}^{n-1} C_{\ell} p^{\ell} q^{(n-1)-\ell} \\ &= np(p+q)^{n-1} = np \end{aligned}$$

と計算されます。別の計算法も紹介します。2 項定理の式

$$(p+q)^n = \sum_{k=0}^n {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

の両辺を p で偏微分すると

$$n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k {}_nC_k p^{k-1} q^{n-k}$$

を得ます。この両辺を p 倍すると

$$np(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k {}_nC_k p^k q^{n-k}$$

を得ます。

次に Y の期待値を考えましょう。

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} k P(Y=k) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot q^k p = p \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot q^k \quad (1.2)$$

となります。この値を計算します。 $T_n := \sum_{k=0}^N k \cdot q^k$ とします。このとき

$$(1-q)T_n = q + q^2 + \cdots + q^n - nq^{n+1} = \frac{q - q^{n+1}}{1-q} - nq^{n+1}$$

から

$$T_n = \frac{q - q^{n+1}}{(1-q)^2} - \frac{nq^{n+1}}{1-q}$$

を得ます。ここで $n \rightarrow +\infty$ とすれば

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot q^k = \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p^2}$$

を得ます。従って

$$E[Y] = p \frac{q}{p^2} = \frac{p}{q}$$

と計算されます。次の演習 1.1 と (1.7) (6 ページ) において、微分を用いた別の計算法を紹介します。

演習 1.1. 条件 $q \neq 1$ の下で成立する

$$S_n = 1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q - q^{n+1}}{1-q}$$

を微分した後に、 $n \rightarrow +\infty$ として $\sum_{k=0}^{+\infty} k q^k$ の値を求めましょう。

解析の準備—絶対収束、無限和と微分

ここで脇道にそれて、無限和について解説します。

絶対収束 無限級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ が絶対収束するとは

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \quad (1.3)$$

が成立するときです。一般に単調増加する数列 $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ が収束する必要十分条件は、 $\{b_n\}_{n=0}^{+\infty}$ が上に有界であること、すなわち、ある定数 M が存在して (1.3)

$$b_n \leq M \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

が成立することです。このことを念頭におけば、条件 (1.3) は無限級数 $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n|$ が収束することを意味します。この表現は今後よく使いますので注意しましょう。

実は「絶対収束する無限級数は収束する」ことが知られています。

絶対収束の判定法 数列 $\{a_n\}$ の各項が 0 にならないとします。このとき

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \sigma$$

において、 $\sigma < 1$ ならば $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ は絶対収束します。また $\sigma > 1$ ならば収束しません。

例えば、正数 $r > 0$ と非負整数 k に対して $a_n = n^k r^n$ とすると

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k \cdot r \rightarrow r$$

ですから、無限級数

$$\sum_{k=0}^{+\infty} n^k r^n$$

は $|r| < 1$ のとき絶対収束することが分かります。

べき級数 べき級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad (1.4)$$

の収束についていくつかの基本的な事実を解説します。ある実数 x_0 に対して

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x_0^n \quad (1.5)$$

が収束していたとします。このとき $|x| < |x_0|$ を満たす x に対して (1.4) が収束します。実際、(1.5) が収束することから

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n x_0^n = 0$$

が従いますから、数列 $\{a_n x_0^n\}$ は有界となります。従って

$$|a_n| \cdot |x_0|^n \leq L \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

を満たす正数 $L > 0$ が存在します。これを用いると、 $|x| < |x_0|$ のとき

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n x^n| \leq L \sum_{n=0}^{+\infty} \left| \frac{x}{x_0} \right|^n < +\infty$$

と (1.4) が絶対収束することが分かります。

次に

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$$

が成立するとします。このときべき級数 (1.4) は $|x| < \frac{1}{r}$ を満たす x に対して絶対収束します。

微分と無限和の交換 開区間 (a, b) 上で微分可能な関数列 $f_n(x)$ が条件

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} |f'_n(x)| < +\infty$$

が成立するとき、無限和と微分は交換して

$$\frac{d}{dx} \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} f'_k(x)$$

が成立します。

この事実をべき級数が定める関数について適用します。すなわち、べき級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

が条件

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r$$

を満たすとします。このとき、べき級数の各項を微分した

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

について

$$\left| \frac{(n+1)a_{n+1}}{n a_n} \right| = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \cdot \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \longrightarrow 1 \cdot r = r$$

から、 $\sum_{n=0}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$ が $|x| < \frac{1}{r}$ において絶対収束することが分かります。
このことから

$$\frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}$$

であることが分かります。

ここで述べた事実を用いて、(1.2) にある幾何変数の期待値

$$E[Y] = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot q^k p = p \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot q^k$$

を計算します。そのために

$$\frac{1}{1-q} = 1 + q + q^2 + \cdots + q^k + \cdots$$

の両辺を q で微分して

$$\frac{1}{(1-q)^2} = 0 + 1 + 2 \cdot q + 3q^2 + \cdots + kq^{k-1} + \cdots \quad (1.6)$$

を得ます。さらに、この両辺を q 倍して

$$\frac{q}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k q^k$$

が従い、確率変数 Y の期待値が

$$E[Y] = p \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p} \quad (1.7)$$

と計算されます。

分散・標準偏差

再び 1 において導入した 2 項変数と幾何変数を題材に確率変数に関する諸概念を導入していきます。

2 項変数 X の分散とは、その期待値 $\mu = E[X] = \frac{n}{p}$ を用いて

$$V[X] = \sum_{k=0}^n (k - \mu)^2 P(X = k)$$

で定義します。一般に、2 項変数 X に対して、その関数 $f(X)$ の期待値を

$$E[f(X)] := \sum_{k=0}^n f(k) P(X = k)$$

と定めるとき

$$V[X] = E[(X - \mu)^2]$$

であることに注意しましょう。定数 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ と別の関数 $g(X)$ に対して

$$E[\lambda_1 f(X) + \lambda_2 g(X)] = \lambda_1 E[f(X)] + \lambda_2 E[g(X)]$$

が成立することに注意しましょう。このことは、確率変数の考えを今から拡張していても成立する式です。この場合は

$$\begin{aligned} E[\lambda_1 f(X) + \lambda_2 g(X)] &= \sum_{k=0}^n (\lambda_1 f(k) + \lambda_2 g(k)) P(X = k) \\ &= \lambda_1 \sum_{k=0}^n f(k) P(X = k) + \lambda_2 \sum_{k=0}^n g(k) P(X = k) \\ &= \lambda_1 E[f(X)] + \lambda_2 E[g(X)] \end{aligned}$$

と証明されます。このことに加えて

$$E[1] = \sum_{k=0}^n P(X = k) = 1$$

が成立することに注意します。

以上の準備の下で

$$V[X] = E[X^2] - (E[X])^2$$

を示すことができます。実際、

$$\begin{aligned} V[X] &= E(X^2 - 2\mu X + \mu^2) \\ &= E[X^2] - 2\mu \cdot E[X] + \mu^2 E[1] \\ &= E[X^2] - 2(E[X])^2 + (E[X])^2 \\ &= E[X^2] - (E[X])^2 \end{aligned}$$

と証明できます。これを用いると $E[X^2]$ を計算すれば X の分散 $V[X]$ を求めることができます。そこで $E[X^2]$ を次のように求めます。

$$\begin{aligned} E[X^2] &= \sum_{k=0}^n k^2 {}_n C_k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n k(k-1) {}_n C_k p^k q^{n-k} + \sum_{k=0}^n k {}_n C_k p^k q^{n-k} \\ &= \sum_{k=2}^n k(k-1) {}_n C_k p^k q^{n-k} + np \end{aligned}$$

と計算を進めます。ここで、(1.1) を用いて得られる

$$k(k-1) {}_n C_k = n(n-1) {}_{n-2} C_{k-2}$$

を用いると

$$\begin{aligned}
 E[X^2] &= \sum_{k=2}^n n(n-1)_{n-2} C_{k-2} p^k q^{n-k} + np \\
 &\quad (\ell = k-2 \text{ と変数変換}) \\
 &= n(n-1) \sum_{\ell=0}^{n-2} n_{-2} C_{\ell} p^{\ell+2} q^{(n-2)-\ell} + np \\
 &= n(n-1)p^2 \sum_{\ell=0}^{n-2} n_{-2} C_{\ell} p^{\ell} q^{(n-2)-\ell} + np \\
 &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} + np \\
 &= n(n-1)p^2 + np = np\{(n-1)p+1\}
 \end{aligned}$$

が従います。これから

$$\begin{aligned}
 V[X] &= E[X^2] - (E[X])^2 = np\{(n-1)p+1\} - n^2p^2 \\
 &= np\{(n-1)p+1-np\} = np(1-p) = npq
 \end{aligned}$$

と 2 項変数 X の分散が求められます。

次に幾何変数 Y の分散

$$V[Y] = E[(Y - \mu)^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} (k - \mu)^2 P(X = k)$$

を求めます。

この場合も、 X の場合と同様に定数 $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ と Y の関数 $f(Y)$ と $g(Y)$ に対して

$$E[\lambda_1 f(Y) + \lambda_2 g(Y)] = \lambda_1 E[f(Y)] + \lambda_2 E[g(Y)]$$

$$E[1] = 1$$

であることを用いるとを得ます。そこで

$$E[Y^2] = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p q^k = p \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 q^k$$

を計算します。そのために (1.6) すなわち

$$\frac{1}{(1-q)^2} = \sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1}$$

の両辺を微分して得られる

$$\frac{2}{(1-q)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1) q^{k-2}$$

の両辺を q^2 倍して

$$\frac{2q^2}{(1-q)^3} = \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^k$$

を導きます。これから

$$\begin{aligned} E[Y^2] &= p \sum_{k=0}^{+\infty} k(k-1)q^k + p \sum_{k=0}^{+\infty} kq^k \\ &= \frac{2pq^2}{(1-q)^3} + \frac{q}{p} = \frac{q(q+1)}{p^2} \end{aligned}$$

が従い

$$V[X] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = \frac{q(q+1)}{p^2} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

を得ます。

高次のモーメント・モーメント母関数・特性関数