$\varphi_X(\xi)$ 確率変数 X の
特性関数

---

f, g : $\mathbb{R}$ 上の関数

$$(f * g)(z) = \int_{\mathbb{R}} f(z-y)\, g(y)\, dy.$$

f と g のたたみ込み
(convolution)

注意のポイント

$$f * g = g * f.$$

注

$$\left.\begin{array}{l} \int_{\mathbb{R}} |f| < +\infty \\ \int_{\mathbb{R}} |g| < +\infty \end{array}\right\} \Rightarrow \int_{\mathbb{R}} |f * g|\, dx.$$

Fubini

$$\int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} |F(x,y)|\, dx \right) dy < +\infty$$

$$\Rightarrow \int_{\mathbb{R}^2} F(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} F(x,y)\, dy \right) dx.$$

$X_1, \cdots, X_n$ が独立

$\Longleftrightarrow$ $P(a_1 \leq X \leq b_1, \cdots, a_n \leq X \leq b_n)$

$$= \prod_{i=1}^{n} P(a_i \leq X_i \leq b_i)$$

$$\prod_{i=1}^{n} \alpha_i = \alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n$$

product
=

sum
= Σ

Z: n, p の2項分布する

$E[Z] = E[X_1] + \cdots + E[X_n]$

独立は仮定しなくてよい。

$E[X_i] = q \cdot 0 + p \cdot 1 = p$

$E[Z] = np$.

$V[Z] \underset{\uparrow \text{独立}}{=} V[X_1] + \cdots + V[X_n]$

$$V[Z] = V[X_1] + \cdots + V[X_n]$$

$\uparrow$

独立

$$V[X_i] = E[X_i^2] - (E[X_i])^2$$
$$= 0^2 \cdot q + 1^2 \cdot p - (p)^2$$
$$= p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$V[Z] = npq.$$

$\alpha \in \mathbb{C}$

$$(e^{\alpha t})' = \alpha e^{\alpha t}.$$

まとめ

$$\boxed{E[X] = \frac{1}{\sqrt{-1}} \varphi'(0)}$$

$X \sim f(x)$ とする

$$\varphi(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} f(x)\,dx$$

$$\varphi'(\xi) = \int_{\mathbb{R}} ix\, e^{ix\xi} f(x)\,dx$$

$$= \sqrt{-1} \int x\, e^{ix\xi} f(x)\,dx$$

$$\varphi'(0) = \sqrt{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,dx = \sqrt{-1}\, E[X]$$

$f_n(x)$: (a, b) 上で微分可能

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n(x)| < +\infty$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |f_n'(x)| < +\infty$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n'(x)$$

$$\varphi(\xi) = \sum_{j=0}^{+\infty} e^{i\alpha_j \xi} p_j$$

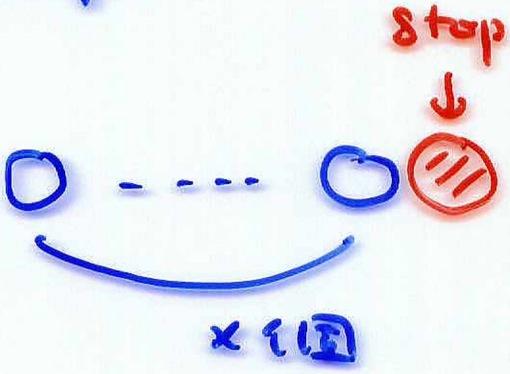
$$\sum_{j=0}^{+\infty} |e^{i\alpha_j \xi} p_j| = \sum_{j=0}^{+\infty} p_j = 1$$

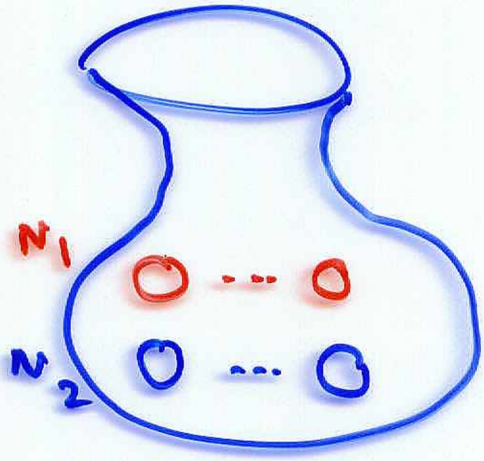
$$\varphi'(\xi) = \sum i\alpha_j e^{i\alpha_j \xi} p_j$$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} |\alpha_j| \cdot p_j < +\infty$$

$$p = \frac{N_1}{N_1 + N_2}$$

$$q = 1 - p$$





$|z| < 1 \qquad 1 + z + z^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-z}$

$$\begin{array}{rl}
S_n = & 1 + z + \cdots + z^n \\
z S_n = & \phantom{1 +{}} z + \cdots + z^n + z^{n+1} \\
\hline
(1-z) S_n = & 1 \qquad\qquad - z^{n+1}
\end{array}$$

$$S_n = \frac{1 - z^{n+1}}{1 - z} \longrightarrow \frac{1}{1-z}$$

$$|z^{n+1}| = |z|^{n+1} \longrightarrow 0$$

$$z^{n+1} \longrightarrow 0$$

$$E[X] = \sum_{k=0}^{+\infty} k p q^k$$

絶対収束　実数の完備性.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \text{ 収束.}$$

収束の判定.　$a_n \neq 0$　d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = r \text{ とする.}$$

(1)　$r < 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ 絶対収束.

(2)　$r > 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$ は収束しない.

べき級数

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \text{ の収束判定.}$$

$$\frac{|a_{n+1} x^{n+1}|}{|a_n x^n|} = |x| \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \sigma \text{ とする.}\quad |x| \cdot \sigma < 1$$

$|x| < \frac{1}{\sigma}$ で収束.

例4. $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n x^n$ $\quad |x|<1$ で収束
絶対収束

$$\frac{n+1}{n} \longrightarrow \sigma = 1.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \sigma$$

とする.

$$\sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cdot n\, x^{n-1}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}\cdot(n+1)}{a_n \cdot n}\right|$$

$|x| < \frac{1}{\sigma}$ において

$$= \left(1+\frac{1}{n}\right)\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \to \sigma$$

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} n\, a_n x^{n-1}$$

これをくり返すと $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ は $|x|<\frac{1}{\sigma}$ で
∞階微分可能

Ge p $\quad P(X = k) = p q^k$

$$E[X] = p \cdot \sum_{k=0}^{+\infty} k q^k = p \cdot \frac{q}{(1-q)^2} = \frac{q}{p}$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \qquad \sigma = 1$$

$$\frac{1}{1} \to 1 = \sigma$$

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k q^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$E[X^2] = \ldots\ldots$$