複素数に対する指数関数

戸瀬　信之

複素数体上の指数関数

- **定義** $e^z := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C})$

複素数体上の指数関数

- **定義** $e^z := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C})$
- 実数値の場合の Taylor 展開 (at $x = 0$) と整合的
  $$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R})$$

複素数体上の指数関数

- **定義** $e^z := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C})$
- 実数値の場合の Taylor 展開 (at $x = 0$) と整合的
  $$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R})$$
- 純虚数の場合の公式 $e^{iy} = \cos y + \sqrt{-1} \sin y$

複素数体上の指数関数

- **定義** $e^z := \displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C})$
- 実数値の場合の Taylor 展開 (at $x = 0$) と整合的

$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R})$$

- 純虚数の場合の公式 $e^{iy} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y$
- $e^{iy} = 1 - iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 \cdots$

複素数体上の指数関数

- **定義** $e^z := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C})$
- 実数値の場合の Taylor 展開 (at $x = 0$) と整合的
$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R})$$
- 純虚数の場合の公式 $e^{iy} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y$
- $e^{iy} = 1 - iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 \cdots$
$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - + \cdots\right) +$
$\sqrt{-1}\left(x - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - + \cdots\right)$

複素数体上の指数関数

- **定義** $e^z := \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (z \in \mathbf{C})$
- 実数値の場合の Taylor 展開 (at $x = 0$) と整合的
$$e^x = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (x \in \mathbf{R})$$
- 純虚数の場合の公式 $e^{iy} = \cos y + \sqrt{-1}\sin y$
- $e^{iy} = 1 - iy - \frac{1}{2!}y^2 - i\frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{4!}y^4 + i\frac{1}{5!}y^5 \cdots$
$= \left(1 - \frac{1}{2!}y^2 + \frac{1}{4!}y^4 - + \cdots\right) +$
$\sqrt{-1}\left(x - \frac{1}{3!}y^3 + \frac{1}{5!}y^5 - + \cdots\right)$
$= \cos y + \sqrt{-1}\sin y$

重要な公式

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$

重要な公式

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 純虚数の場合　三角関数の加法定理

重要な公式

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 純虚数の場合　三角関数の加法定理
- $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} =$
  $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$

重要な公式

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 純虚数の場合　三角関数の加法定理
- $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} =$
  $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$
  $= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$
  $\sqrt{-1}\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$

重要な公式

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 純虚数の場合　三角関数の加法定理
- $e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} =$
  $(\cos\alpha + \sqrt{-1}\sin\alpha) \cdot (\cos\beta + \sqrt{-1}\sin\beta)$
  $= (\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) +$
  $\sqrt{-1}\,(\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta)$
  $= \cos(\alpha+\beta) + \sqrt{-1}\sin(\alpha+\beta) = e^{i(\alpha+\beta)}$

重要な公式（その 2）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$

重要な公式（その２）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 一般の場合　$z, w \in \mathbf{C}$

重要な公式（その２）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 一般の場合　$z, w \in \mathbf{C}$

$$e^z \cdot e^w = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!}$$

重要な公式（その 2）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 一般の場合　$z, w \in \mathbf{C}$

$$e^z \cdot e^w = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} \;=\; \sum_{(i,j)\in \mathbf{Z}_+^2} \frac{z^i w^j}{i!j!}$$

重要な公式（その2）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 一般の場合　$z, w \in \mathbf{C}$

$$e^z \cdot e^w = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} \quad = \sum_{(i,j) \in \mathbf{Z}_+^2} \frac{z^i w^j}{i!j!}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{i+j=\ell} \frac{\ell!}{i!j!} z^i w^j$$

重要な公式（その２）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 一般の場合　$z, w \in \mathbf{C}$

$$e^z \cdot e^w = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} = \sum_{(i,j)\in \mathbf{Z}_+^2} \frac{z^i w^j}{i!j!}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{i+j=\ell} \frac{\ell!}{i!j!} z^i w^j$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} (z+w)^\ell = e^{z+w}$$

重要な公式（その２）

- 公式　$e^z \cdot e^w = e^{z+w} \quad (z, w \in \mathbf{C})$
- 一般の場合　$z, w \in \mathbf{C}$

$$e^z \cdot e^w = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{z^i}{i!} \cdot \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{w^j}{j!} = \sum_{(i,j)\in\mathbf{Z}_+^2} \frac{z^i w^j}{i!j!}$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} \sum_{i+j=\ell} \frac{\ell!}{i!j!} z^i w^j$$

$$= \sum_{\ell=0}^{+\infty} \frac{1}{\ell!} (z+w)^\ell = e^{z+w}$$

- ２項定理 $\displaystyle\sum_{i+j=\ell} \frac{\ell!}{i!j!} z^i w^j = (z+w)^\ell$

応用

- $z = x + \sqrt{-1}y$ に対して

応用

- $z = x + \sqrt{-1}y$ に対して
  $e^z = e^{x+\sqrt{-1}y} = e^x \left(\cos y + \sqrt{-1}\sin y\right)$

複素数値関数の微積分 No1

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)$ に対して

複素数値関数の微積分No1

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1} f_2'(x)$

複素数値関数の微積分No1

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1} f_2'(x)$
- 公式　複素数値の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して

複素数値関数の微積分**No1**

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}f_2'(x)$
- 公式　複素数値の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して
  公式（1）$(f \pm g)' = f' \pm g'$

複素数値関数の微積分 **No1**

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}f_2'(x)$
- 公式　複素数値の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して
  公式（1）$(f \pm g)' = f' \pm g'$
  公式（2）$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$

複素数値関数の微積分No1

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1}f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1}f_2'(x)$
- 公式　複素数値の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して
  公式（1）$(f \pm g)' = f' \pm g'$
  公式（2）$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  公式（3）$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

複素数値関数の微積分No1

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1} f_2'(x)$
- 公式　複素数値の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して
  公式（1）$(f \pm g)' = f' \pm g'$
  公式（2）$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  公式（3）$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- 例 $b \in \mathbf{R}$ に対して
  $\left(e^{ibx}\right)' = \left(\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx\right)'$
  $= -b \sin bx + \sqrt{-1} b \cos bx$

複素数値関数の微積分No1

- 複素数値の関数 $f(x) = f_1(x) + \sqrt{-1} f_2(x)$ に対して
  $f'(x) = f_1'(x) + \sqrt{-1} f_2'(x)$
- 公式　複素数値の関数 $f(x)$ と $g(x)$ に対して
  公式（1）$(f \pm g)' = f' \pm g'$
  公式（2）$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
  公式（3）$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- 例 $b \in \mathbf{R}$ に対して
  $\left(e^{ibx}\right)' = \left(\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx\right)'$
  $= -b \sin bx + \sqrt{-1} b \cos bx$
  $= ib \left(\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx\right) = ibe^{ibx}$

複素数値関数の微積分No2

- $\alpha = a + ib$ に対して
  $(e^{\alpha x})' = \left(e^{ax}e^{ibx}\right)$

複素数値関数の微積分 **No2**

- $\alpha = a + ib$ に対して
  $(e^{\alpha x})' = \left(e^{ax}e^{ibx}\right)$
  $= (e^{ax})' \, e^{ibx} + e^{ax}\left(e^{ibx}\right)'$

複素数値関数の微積分 No2

- $\alpha = a + ib$ に対して
  $(e^{\alpha x})' = \left(e^{ax}e^{ibx}\right)$
  $= (e^{ax})' e^{ibx} + e^{ax}\left(e^{ibx}\right)'$
  $= ae^{ax}e^{ibx} + e^{ax}\left(ibe^{ibx}\right) = (a + ib)e^{ax}e^{ibx}$

複素数値関数の微積分 No2

- $\alpha = a + ib$ に対して
  $(e^{\alpha x})' = \left(e^{ax}e^{ibx}\right)$
  $= (e^{ax})' \, e^{ibx} + e^{ax} \left(e^{ibx}\right)'$
  $= ae^{ax}e^{ibx} + e^{ax} \left(ibe^{ibx}\right) = (a + ib)e^{ax}e^{ibx}$
  $= \alpha e^{\alpha x}$

複素数値関数の微積分 **No3**

- 複素数値の関数 $g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$ の定積分
  $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$

複素数値関数の微積分 No3

- 複素数値の関数 $g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$ の定積分
  $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$
- 複素数値の関数 $G(x)$ が $g(x)$ の原始関数とは

複素数値関数の微積分 **No3**

- 複素数値の関数 $g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$ の定積分
  $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$
- 複素数値の関数 $G(x)$ が $g(x)$ の原始関数とは
  $G'(x) = g(x)$

複素数値関数の微積分No3

- 複素数値の関数 $g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$ の定積分
  $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$
- 複素数値の関数 $G(x)$ が $g(x)$ の原始関数とは
  $G'(x) = g(x)$
  このとき
  $\int_a^b g(x)dx = [G(x)]_a^b$

複素数値関数の微積分No3

- 複素数値の関数 $g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$ の定積分
$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$
- 複素数値の関数 $G(x)$ が $g(x)$ の原始関数とは
$G'(x) = g(x)$
このとき
$\int_a^b g(x)dx = [G(x)]_a^b$
実際　$G_1'(x) = g_1(x),\ G_2'(x) = g_2(x)$ から
$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$

複素数値関数の微積分No3

- 複素数値の関数 $g(x) = g_1(x) + \sqrt{-1}g_2(x)$ の定積分
$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$
- 複素数値の関数 $G(x)$ が $g(x)$ の原始関数とは
$G'(x) = g(x)$
このとき
$\int_a^b g(x)dx = [G(x)]_a^b$
実際　$G_1'(x) = g_1(x),\ G_2'(x) = g_2(x)$ から
$\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g_1(x)dx + \sqrt{-1}\int_a^b g_2(x)dx$
$= [G_1(x)]_a^b + \sqrt{-1}\,[G_2(x)]_a^b = [G(x)]_a^b$