2 変数正規分布と 2 次形式

$A = \begin{pmatrix} a & c \\ c & b \end{pmatrix}$ は ${}^tA = A$ を満たし 対称行列と呼ばれる。この A が定める 2 次形式とは

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right) = ax^2 + 2cxy + by^2$$

のことである。

$$\Phi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -c \\ -c & \lambda - b \end{vmatrix}$$
$$= (\lambda - a)(\lambda - b) - c^2$$
$$= \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$$

の判別式は

$$D = (a+b)^2 - (4ab - c^2)$$
$$= (a-b)^2 + 4c^2 \geqq 0$$

であるので実根を持つ。しかも

$$D = 0 \iff a = b,\ c = 0 \iff A = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

以下、簡単のため $D > 0$ とする。そして固有値を α, β とする。このとき $\alpha \neq \beta$

α の固有ベクトルで大きさ 1 のものを $\vec{p_1}$,

β の固有ベクトルで大きさ 1 のものを $\vec{p_2}$

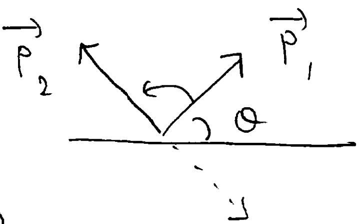
とする

$$(A\vec{p_1}, \vec{p_2}) = (\vec{p_1}, {}^tA\vec{p_2}) = (\vec{p_1}, A\vec{p_2})$$
$$(A\vec{p_1}, \vec{p_2}) = (\alpha\vec{p_1}, \vec{p_2}) = \alpha(\vec{p_1}, \vec{p_2})$$
$$(\vec{p_1}, A\vec{p_2}) = (\vec{p_1}, \beta\vec{p_2}) = \beta(\vec{p_1}, \vec{p_2})$$

から $(\alpha - \beta)(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = 0$ を得る。

従って $(\vec{p_1}, \vec{p_2}) = 0$

必要ならば $\vec{p_2}$ を (-1) 倍して $\vec{p_1}$ を 90° 回転したものが $\vec{p_2}$ であるとする。



$$P = (\vec{p_1}\ \vec{p_2}) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

と回転の行列となる。

$${}^tP = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = P^{-1}$$

から

$${}^tPP = P\,{}^tP = I_2$$

が成立する。このとき $AP = P\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$ が成立。

Aが定める2次形式が正定値とは

$$\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) > 0 \quad \left(全ての \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \neq \vec{0}\right)$$

が成立するときである。${}^tP$ も回転行列であるので

$$\left({}^tPAP\,{}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, {}^tP\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$= \left(\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}\right) = \alpha\xi^2 + \beta\eta^2$$

① $\alpha, \beta > 0$ のとき $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ は正定値。

② $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ が正定値 $\Longrightarrow \alpha, \beta > 0$

[$\alpha \leq 0 \Rightarrow$ $(A\vec{p_1}, \vec{p_1}) = \alpha \leq 0$ から分かる。]

$$\alpha, \beta > 0 \iff a > 0,\ ab - c^2 > 0$$

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab - c^2$$

$$\alpha\beta = ab - c^2, \quad \alpha + \beta = a + b$$

($\Rightarrow$) $ab - c^2 > 0$, $ab > 0$, $a + b > 0$ から $a, b > 0$

($\Leftarrow$) $ab - c^2 > 0$ から $\alpha\beta > 0$ である。また $ab > 0$ も得る $b > 0$ となり $\alpha + \beta = a + b > 0$ が従う。

<u>定理</u> $\left(A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$ が正定値

$\iff$ A の固有値 $\alpha, \beta > 0$

$\iff$ $a > 0$, $\det(A) > 0$

$$Q(x, y) = \left(A\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}\right)$$

$$X = x - m_1, \quad Y = y - m_2$$

$$A = \frac{1}{1-\rho^2}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2} & \frac{1}{\sigma_2^2} \end{pmatrix}$$

に注意する。

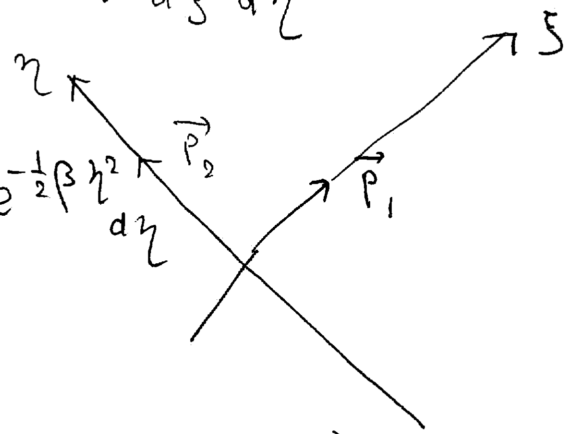
$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{1-\rho^2}\cdot\frac{1}{\sigma_1^2} > 0 \\ &\det(A) = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2} > 0 \end{aligned}\right\}$$

から $|\rho| < 1$ が正定値の条件である。

$\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)$ が正定値とする．この P を用いると

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)} dx\,dy$$

$$= \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(\alpha\xi^2+\beta\eta^2)} d\xi\, d\eta$$



$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha\xi^2} d\xi \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\beta\eta^2} d\eta$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\beta}}$$

$$= 2\pi \frac{1}{\sqrt{\det A}}$$

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \xi\vec{p}_1 + \eta\vec{p}_2$$

$\alpha > 0$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha t^2} dt \qquad x = \sqrt{\alpha}\, t$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt{2\pi}.$$

から

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\det A} \times e^{-\frac{1}{2}\left(A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}\right)}$$

は確率密度関数となる．

特性関数

確率変数 X が確率密度 $f(x)$ を持つとする。このとき、X の特性関数を

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi} f(x)\,dx$$

として定める。

$$\boxed{\begin{array}{l} g(x) = g_1(x) + i\,g_2(x) \\ \text{のとき} \\ \displaystyle\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b g_1(x)\,dx + i\int_a^b g_2(x)\,dx \end{array}}$$

1) f_1, f_2 が連続な確率密度ならば

$$\hat{f}_1(\xi) \equiv \hat{f}_2(\xi) \Rightarrow f_1(x) = f_2(x)$$

が成立する。　（これはかなりレベルの高い内容）

2) $X \sim f(x)$, $Y \sim g(y)$ ならば

X と Y が独立のとき

$$Z = X + Y \sim h(z)$$

$$h(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)\,g(y)\,dy.$$

である。

さらに $\hat{h}(\xi)=\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi)$ が成立する.

$$\hat{h}(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(z-y)\,g(y)\,dy\right)dz$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi} f(z-y)\,dz\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(z-y)\xi}\cdot e^{-iy\xi} f(z-y)\,dz\right)dy$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} g(y)\,e^{-iy\xi}\,dy$$

$$\times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-it\xi} f(t)\,dt$$

$$=\hat{g}(\xi)\,\hat{f}(\xi)$$

3) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ とする.

$$\hat{f}(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(x\xi)\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{x^{2k}\xi^{2k}}{(2k)!}(-1)^k\,e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\xi^{2k}}{(2k)!}\int_{-\infty}^{+\infty}x^{2k}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^k\xi^{2k}}{(2k)!}\,E[x^2]$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k \xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^k \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

$$\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \left(k-\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{1}{2}\right)$$
$$= \left(k-\frac{1}{2}\right)\left(k-\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(k-\frac{3}{2}\right)$$
$$= \cdots = \left(k-\frac{1}{2}\right)\cdots\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2^k}\sqrt{\pi}$$

から

$$\hat{f}(\xi) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k}}{(2k)!} \cdot \frac{(2k-1)\cdots 3\cdot 1\sqrt{\pi}}{2^k} \cdot 2^k \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2k}}{2^k \cdot k!}(-1)^k$$
$$= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{\xi^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$$

を得る。ここで

$$\frac{(2k-1)(2k-3)\cdots 3\cdot 1}{2k\cdot(2k-1)(2k-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1}$$
$$= \frac{1}{(2k)(2k-2)(2k-4)\cdots 4\cdot 2}$$
$$= \frac{1}{2^k k!}$$

を用いた。

まとめ $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\right)^\wedge = e^{-\frac{\xi^2}{2}}$

4) $X \sim f(x)$ とする。$\lambda \neq 0$ のとき

① $Y = \lambda X \sim \frac{1}{\lambda} f(\lambda x)$

$\lambda > 0$ のとき

$$P(a \leq Y \leq b) = P\left(\frac{a}{\lambda} \leq X \leq \frac{b}{\lambda}\right)$$

$$= \int_{\frac{b}{\lambda}}^{\frac{a}{\lambda}} f(x)\,dx = \int_b^a f(\lambda y) \frac{dy}{\lambda}$$

から従う。

② $Y = X + m \sim f(y-m)$

③ ① と ② から。

$$Z = \sigma X + m \sim f(\sigma z - m) \frac{1}{\sigma}$$

この Z の特性関数は

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-iz\xi} f(\sigma z - m) \frac{1}{\sigma} dz$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i(\sigma x + m)\xi} f(x)\,dx$$

$$= e^{-im\xi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\cdot\sigma\xi} f(x)\,dx$$

$$= e^{-im\xi} \hat{f}(\sigma\xi)$$

5) この'公式'を用いると

$X \sim N_{m,\sigma}$ とすると $Z = \sigma X + m$

$\sim N_{0,1}$

$$\hat{N}_{m,\sigma}(\xi) = e^{-im\xi}\ e^{-\frac{\sigma^2}{2}\xi^2}$$

を得る。

$X \sim N_{m_1,\sigma_1}$, $Y \sim N_{m_2,\sigma_2}$ とするとき

X, Y が独立ならば

$Z = X + Y \sim h(z)$ とすると

$$\begin{aligned}
\hat{h}(\xi) &= \hat{N}_{m_1,\sigma_1}(\xi)\,\hat{N}_{m_2,\sigma_2}(\xi) \\
&= e^{-im_1\xi}\ e^{-\frac{\sigma_1^2}{2}\xi^2} \\
&\qquad \times e^{-im_2\xi}\ e^{-\frac{\sigma_2^2}{2}\xi^2} \\
&= e^{-i(m_1+m_2)\xi}\ e^{-\frac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\xi^2}
\end{aligned}$$

から $= \hat{N}_{m_1+m_2,\sigma_3}$ （但し $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma_3^2$）

$$Z \sim N_{m_1+m_2,\sigma_3}$$

を得る.