Γ関数について

$\alpha > 0$ に対し Γ関数

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx$$

と定める。$\alpha = 1$ のときは

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx = \Big[-e^{-x}\Big]_0^{+\infty} = 1$$

を得る。また

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = \sqrt{2\pi}$$

を用いると、$s = \frac{t^2}{2}$ と変数変換して

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt = 2\int_0^{+\infty} e^{-s} \frac{1}{\sqrt{2s}}\, ds.$$

$$= \sqrt{2} \int_0^{+\infty} s^{\frac{1}{2}-1} e^{-s}\, ds \qquad \boxed{ds = t\, dt = \sqrt{2s}\, dt}$$

$$= \sqrt{2}\, \Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

から $\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ が従う.

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x^s \left(-e^{-x}\right)' dx$$

$$= \Big[-x^s e^{-x}\Big]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} s x^{s-1} e^{-x}\, dx$$

$$= s\,\Gamma(s)$$

を得る。すなわち公式

$$\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$$

が従う. n を自然数とすると

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) \\ &= \cdots = n(n-1)\cdots 2\Gamma(2) \\ &= n(n-1)\cdots 2\Gamma(1) = n!\end{aligned}$$

から公式

$$\Gamma(n+1) = n!$$

を得る.

X を標準正規変数とする.

$$E[X^{2k}] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$= 2\int_0^{+\infty} x^{2k} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \qquad t = \frac{x^2}{2} \text{ と変数変換}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+\infty} (2t)^k e^{-t} \cdot \frac{1}{\sqrt{2t}} dt \qquad \begin{aligned} dt &= x\,dx \\ &= \sqrt{2t}\,dx \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^k \int_0^{+\infty} t^{k+\frac{1}{2}-1} e^{-t} dt$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^k \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

を得る.

$$E[X^{2k}] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} 2^k \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)$$

$$(k = 0, 1, 2, \cdots)$$

例えば

$$E[x^2] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2\,\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2\,\frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \sqrt{\pi} = 1$$

$$E[x^4] = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^2\,\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot 2^2\,\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$= 3.$$

を得る.

(2)

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\,dx$$

において $y=\alpha x$ とすると $dy=\alpha\,dx$ であり，$\alpha>0$ から右の対応を得る。よって

x	0	$\to$	$+\infty$
y	0	$\to$	$+\infty$

$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty}\left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\lambda-1}e^{-y}\,\frac{1}{\alpha}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} y^{\lambda-1}e^{-y}\,dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)}\times\Gamma(\lambda) = 1$$

より $f(x)$ は確かに確率密度関数を得る。

$$E(X) = \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} x\cdot x^{\lambda-1}e^{-\alpha x}\,dx$$

$$= \frac{\alpha^\lambda}{\Gamma(\lambda)}\int_0^{+\infty} x^{\lambda}e^{-\alpha x}\,dx$$

において　$y = \alpha x$　とすると

$$E(X) = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\lambda} e^{-y} \frac{1}{\alpha}\, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} y^{\lambda} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \Gamma(\lambda+1) = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot \lambda \Gamma(\lambda)$$

$$= \frac{\lambda}{\alpha}$$

となる。$V(X)$ を求めるため 2次のモーメントを求めよう.

$$E(X^2) = \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} x^2 \cdot x^{\lambda-1} e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{\alpha^{\lambda}}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} x^{\lambda+1} e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} \left(\frac{y}{\alpha}\right)^{\lambda+1} e^{-y} \frac{1}{\alpha}\, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \int_0^{+\infty} y^{\lambda+1} e^{-y}\, dy$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \Gamma(\lambda+1)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{\Gamma(\lambda)} \cdot (\lambda+1)\lambda \Gamma(\lambda)$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \lambda(\lambda+1)$$

となる。よって　X の分散は

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

$$= \frac{1}{\alpha^2} \lambda(\lambda+1) - \frac{\lambda^2}{\alpha^2} = \frac{\lambda}{\alpha^2}$$

となる。

$$I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

はガウスの積分と呼ばれて、確率論・統計学で重要な役割をはたす。この異常積分が存在するのは $\alpha > 0$ に対して

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} e^{-x^2} = 0$$

であることからわかる。ここでは、この値を求めよう。そのために Wallis の積分を定義しよう。$m = 0, 1, 2, 3, \cdots$ に対して

$$S_m = \int_0^{\pi/2} \sin^m \ x dx$$

と定める。ここで変数変換を行う。
m **が奇数のとき**：$m = 2n + 1$ のとき

$$t = \cos \ x$$

とおくと

$$dt = -\sin \ x dx, \sin^{2n+1} \ x = \sin \ x(1 - \cos^2 x)^n$$

であるので

$$S_m = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt$$

が成立する。
m **が偶数のとき**：$m = 2n - 2$ のとき

$$t = \cot \ x = \frac{1}{\tan \ x}$$

とおくと

$$dt = -\frac{1}{\sin^2 \ x} dx$$

より

$$dx = -\frac{1}{1 + \cot^2 \ t} dt = -\frac{1}{1 + t^2} dt$$

である。そして

$$\sin^2 x = \frac{1}{1 + \cot^2 x} = \frac{1}{1 + t^2}$$

であることを用いると

$$\begin{aligned} S_m = S_{2n-2} &= \int_0^{\pi/2} \sin^{2n-2} x dx \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^{n-1}} \frac{1}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1 + t^2)^n} dt \end{aligned}$$

を得る。

ここで、I に関して $x=\sqrt{n}t$ と変数変換しよう。すると

$$I=\sqrt{n}\int_0^{+\infty}e^{-nt^2}dt$$

を得る。さらに任意の $t\in\mathbb{R}$ に対して

$$1-t^2\le e^{-t^2}\le\frac{1}{1+t^2}$$

が成立するので (演習)

$$(1-t^2)^n\le e^{-nt^2}\le\frac{1}{(1+t^2)^n}$$

から

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\int_0^1(1-t^2)^n dt &\le \sqrt{n}\int_0^1 e^{-nt^2}dt\\ &\le \sqrt{n}\int_0^{+\infty}e^{-nt^2}dt\le\sqrt{n}\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+t^2)^n}dt\end{aligned}$$

から

$$\sqrt{n}S_{2n+1}<I\le\sqrt{n}S_{2n-2}$$

を得る。

他方

$$\begin{aligned}S_m &= \int_0^{\pi/2}\sin^m xdx\\ &= \int_0^{\pi/2}\sin^{m-1}x(-\cos\ x)'dx\\ &= \left[-\sin^{m-1}x\cos\ x\right]_0^{\pi/2}+\int_0^{\pi/2}(m-1)\sin^{m-2}x\cdot\cos x\cos xdx\\ &= (m-1)\left\{\int_0^{\pi/2}\sin^{m-2}xdx-\int_0^{\pi/2}\sin^m xdx\right\}\\ &= (m-1)\left\{S_{m-2}-S_m\right\}\end{aligned}$$

から

$$S_m=\frac{m-1}{m}S_{m-2}$$

を得る。これを用いると

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \frac{2n-1}{2n}S_{2n-2} \\ &= \frac{2n-1}{2n}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}S_{2n-4} \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}S_0 \\ &= \frac{(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1}{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} S_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1}S_{2n-1} \\ &= \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-2}{2n-1}S_{2n-3} \\ &= \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3}S_1 \\ &= \frac{2n(2n-2)\cdots 4\cdot 2}{(2n-1)(2n-3)\cdots 5\cdot 3} \end{aligned}$$

が導かれる。この２つの公式から

$$S_{2n}S_{2n+1} = \frac{1}{2n+1}\cdot\frac{\pi}{2}$$

を得る。さらに、

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} = 1$$

が導かれる。実際、$0 \le x \le \frac{\pi}{2}$ であるとき $0 \le \sin\ x \le 1$ であるので

$$0 \le \sin^{2n+1} x \le \sin^{2n} x \le \sin^{2n-1} x$$

を得るので

$$0 < S_{2n+1} \le S_{2n} \le S_{2n-1}$$

が分かる。この式を $S_{2n+1} > 0$ で割ると

$$1 < \frac{S_{2n}}{S_{2n+1}} \le \frac{S_{2n-1}}{S_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}$$

であるので、

$$\frac{2n+1}{2n} \longrightarrow 1 \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

を用いて、はさみうちの原理から () が分かる。

さて () 、すなわち

$$\sqrt{n}S_{2n+1} < I \le \sqrt{n}S_{2n-2}$$

において $n \longrightarrow +\infty$ としよう。

$$\begin{aligned}\sqrt{n}S_{2n+1} &= \sqrt{n}\sqrt{\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}}\sqrt{S_{2n}S_{2n+1}} \\ &= \sqrt{n}\sqrt{\frac{S_{2n+1}}{S_{2n}}}\sqrt{\frac{\pi}{4n+2}} \\ &\longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (n \longrightarrow +\infty)\end{aligned}$$

さらに、この極限と () を用いて

(*)

$$\sqrt{n}S_{2n-2} \longrightarrow \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad (n \longrightarrow +\infty)$$

以上で

$$I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

を得る。

この式から

Wallisの公式

$$\sqrt{\pi} = \lim_{n \to +\infty} \frac{2^{2n}(n!)^2}{\sqrt{n}(2n)!}$$

$${}_{2n}C_{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

を得る.

正規分布に関連する積分

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx = \sqrt{2\pi}}$$

を前提としよう。（後に示す。）

$$N_{0,1}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

を標準正規分布の密度関数と呼ぶ。

実際 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} N_{0,1}(x)\, dx = 1$

が成立する。

$$E(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, N_{0,1}(x)\, dx = 0$$

は $x e^{-\frac{x^2}{2}}$ が奇関数であることから従う。

$$\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' = -x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

であるので

$$E(x^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} (-x)\left(e^{-\frac{x^2}{2}}\right)' dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[(-x)\, e^{-\frac{x^2}{2}}\right]_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

$$\overset{(*)}{=} 1.$$

(*) $\displaystyle\lim_{R\to+\infty} \frac{R}{e^{\frac{R^2}{2}}} = 0$ に注意しよう。

より

$$V(x) = E(x^2) - E(x)^2 = 1$$

が分る。

$$N_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

を正規分布の密度関数とよぶ。

$$z = \frac{(x-m)}{\sigma}$$

と変数変換をすると $dz = \frac{1}{\sigma} dx$ より

$$\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m,\sigma}(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$$

が分る。

$$E(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, N_{m,\sigma}(x)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \{(x-m)+m\} N_{m,\sigma}(x)\, dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x-m}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx + m \underset{1}{\underset{\shortparallel}{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} N_{m,\sigma}(x)\, dx}}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-\frac{z^2}{2}} \sigma\, dz + m$$

$$= m \quad \left(z e^{-\frac{z^2}{2}} \text{ が奇関数であるので } \int_{-\infty}^{+\infty} z e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0 \right)$$

$$V(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-m)^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2 e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}} \frac{1}{\sigma} dz$$

$$= \sigma^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \sigma^2$$ ($\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1$ を上で示している。)

X が確率密度 $f(x)$ の確率変数，Y が確率密度 $g(x)$ の確率変数とする。X と Y が独立のとき

(即ち

$$P(a \leq X \leq b,\ c \leq Y \leq d) = P(a \leq X \leq b)\, P(c \leq Y \leq d)$$

が成立するとき $Z = X + Y$ は確率密度

$$h(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-y)\, g(y)\, dy$$

を持つことが知られている。(離散的な場合との類似に注意しよう。)

$$f(x) = N_{m_1,\sigma_1}(x), \quad g(x) = N_{m_2,\sigma_2}(x)$$

の場合を計算してみよう。

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{m_1,\sigma_1}(x-y)\, N_{m_2,\sigma_2}(y)\, dy$$

$$= \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-y-m_1)^2}{2\sigma_1^2}}\, e^{-\frac{(y-m_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dy$$

$$\frac{(x-y-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} = \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{\sigma_2^2(y-(x-m_1))^2 + \sigma_1^2(y-m_2)^2\right\}$$

$$= \frac{1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\left\{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)\, y^2 - 2\left(\sigma_2^2(x-m_1)+\sigma_1^2 m_2\right) y + \sigma_2^2(x-m_1)^2 + \sigma_1^2 m_2^2\right\}$$

$$= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}\left\{y^2 - 2\,\frac{\sigma_2^2(x-m_1)+\sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\, y + \frac{\sigma_2^2(x-m_1)^2+\sigma_1^2 m_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right\}$$

$$= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}\left\{\left(y - \frac{\sigma_2^2(x-m_1)+\sigma_1^2 m_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{\sigma_2^2(x-m_1)^2+\sigma_1^2 m_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} - \frac{\left(\sigma_2^2(x-m_1)+\sigma_1^2 m_2\right)^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}\left\{(y - *)^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\,(x-m_1-m_2)^2}{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)^2}\right\}$$

$$= \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\cdot\sigma_2^2}(y-*)^2 + \frac{(x-m_1-m_2)^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

$$I = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{(x-m_1-m_2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}(y-*)^2} dy$$

$$t = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\,(y-*)$$ とすると

$$dt = \sqrt{\frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2}{\sigma_1^2\sigma_2^2}}\,dy$$

より

$$I = \frac{1}{2\pi\,\sigma_1\sigma_2}\, e^{-\frac{(x-(m_1+m_2)}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{\{x-(m_1+m_2)\}}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}} \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, d\tau}}_{=\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_3}\, e^{-\frac{(x-(m_1+m_2))^2}{2\sigma_3^2}}$$

但し $\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$

結論　$Z = X + Y$ は 確率密度関数

$$N_{m_1+m_2,\,\sigma_3}(x)$$

に従う。　$\sigma_3^2 = \sigma_1^2 + \sigma_2^2$