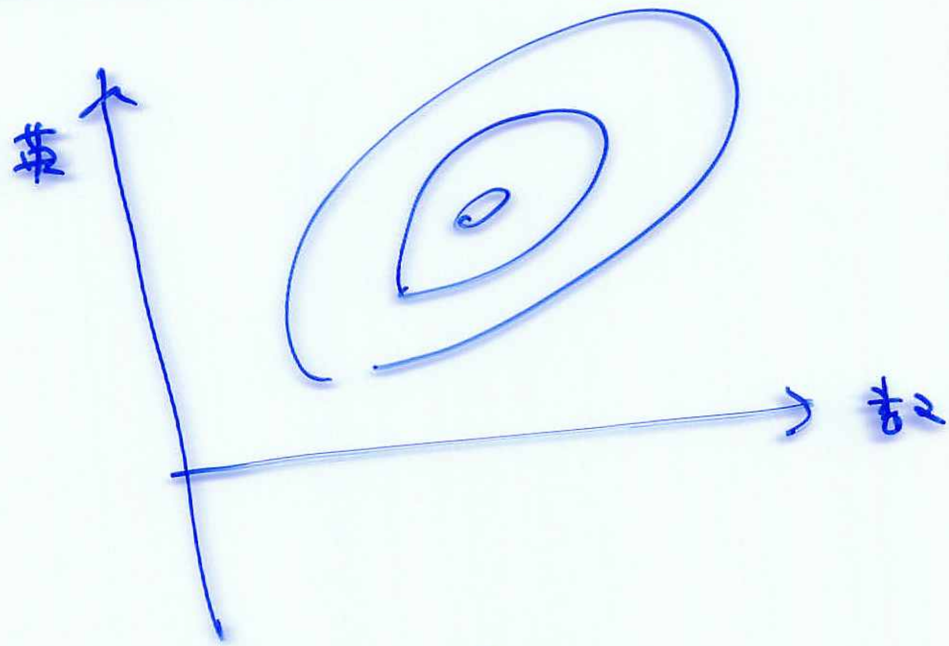
多変数正規分布.



$|\rho| < 1$, $\sigma_1, \sigma_2 > 0$

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{Q}{2}}$$

(i) $f(x,y) \geqq 0$

(ii) $$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$$

$$P\left((X,Y) \in [a,b]\times[c,d]\right)$$

$$= \iint_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy.$$

$$X = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad Y = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$

$$Q = \frac{1}{1-\rho^2}\left(x^2 - 2\rho x y + y^2\right)$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{(x-\rho y)^2 + (1-\rho^2)y^2\right\}$$

$$= \frac{1}{1-\rho^2}\left(z^2 + (1-\rho^2)y^2\right) \quad \boxed{z = x - \rho y \text{ とおく}}$$

xに依らない.

$$= \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho y.$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy$$

$$dz = \frac{dx}{\sigma_1}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_1\sigma_2}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}}\underbrace{dx}_{=\sigma_1 dz}.$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_2}e^{-\frac{y^2}{2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}}\,dz$$

$$\zeta = \frac{dz}{\sqrt{1-\rho^2}} \qquad dz = \sqrt{1-\rho^2}\,d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{\sigma_2}e^{-\frac{y^2}{2}}\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\zeta^2}{2}}\,d\zeta} = \sqrt{2\pi}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_2}e^{-\frac{y^2}{2}}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Y^2}{2}}\, dy \qquad dy = \sigma_2\, dY.$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \underbrace{\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Y^2}{2}}\, dY}}_{=\sqrt{2\pi}.} \qquad Y = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}, \quad dY = \frac{1}{\sigma_2}\, dy$$

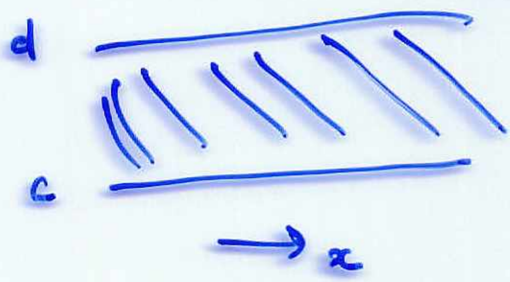
$$= 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

期待値 μ_2, 標準偏差 σ_2 の正規分布の密度.

$$P(c \leqq Y \leqq d)$$

$$= \iint_{\mathbb{R}\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$



$$= \int_c^d \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_c^d \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}\, dy$$

$f(x, y)$ (X, Y) の確率密度.

$$g(y) = \int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dx$$

$\rightsquigarrow$ Y の確率密度

周辺確率密度.

$$E(Y^2) = \iint_{\mathbb{R}^2} y^2 f(x, y)\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y^2 \left(\int_{\mathbb{R}} f(x, y)\,dx \right) dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} y^2 e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_2}\,dy$$

$$= \mu_2 \left[\sigma_2^2 + \mu_2^2 \right]$$

$E(X) = \mu_1$, $V(Y) = \sigma_2^2$, $V(X) = \sigma_1^2$

$$E(XY) = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$C(X,Y) = E\big((X-E(X))(Y-E(Y))\big)$$

共分散 $= E(XY) - E(X)E(Y)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx \right) dy.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx$$

$$z = X - \rho Y = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho Y.$$

$$x = \mu_1 + \sigma_1 z + \sigma_1 \rho Y.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_1 z + \mu_1 + \sigma_1 \rho Y) \times \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \times \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{z^2}{1-\rho^2}} \cdot e^{-\frac{Y^2}{2}} \sigma_1\, dz$$

$$\frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{Y^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} \cdot$$

期待値 0, 標準偏差 $\sqrt{1-\rho^2}$ の ND

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{Y^2}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{z^2}{2(1-\rho^2)}} \times (\sigma_1 z + \mu_1 + \sigma_1 \rho Y)\, dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{Y^2}{2}} (\mu_1 + \sigma_1 \rho Y).$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \cdot (\mu_1 + \rho\sigma_1 Y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_2} e^{-\frac{Y^2}{2}} dy \qquad dy = \sigma_2\, dY$$

$$y = \mu_2 + \sigma_2 Y \qquad Y = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_2 + \sigma_2 Y)(\mu_1 + \rho\sigma_1 Y) \qquad dY = \frac{1}{\sigma_2} dy$$

$$\times \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY.$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = \int_{-\infty}^{+\infty} Y^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY$$

$$= 1$$

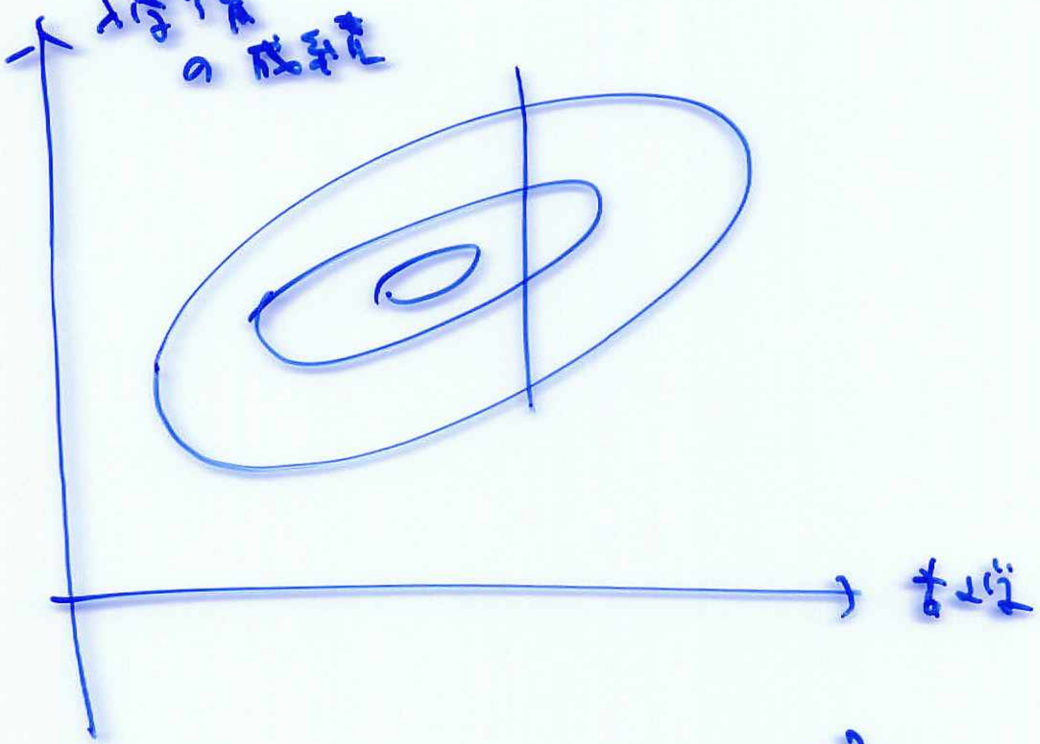
$$\int_{-\infty}^{+\infty} Y \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{Y^2}{2}} dY = 0$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2 + \mu_1\mu_2.$$

$$C(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y)$$

$$= \rho\sigma_1\sigma_2$$

$$\rho(X,Y) = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}} = \frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1\sigma_2} = \rho$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = ?$$

$$X = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{X^2}{2}} dX = 1$$

は使ってよい

$|\rho|<1$ とする。$\sigma_1, \sigma_2 > 0$ とする。

$$Q(x,y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left\{\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2}\right\}$$

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\cdot\frac{1}{\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{Q}{2}}$$

とおく。

(i) $f(x,y) > 0$

(ii) $\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = 1$

$$X = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1}, \quad Y = \frac{y-\mu_2}{\sigma_2}$$ とおく.

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{1-\rho^2}\left(X^2 - 2\rho XY + Y^2\right) \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}\left\{(X-\rho Y)^2 + (1-\rho^2)Y^2\right\} \\ &= \frac{1}{1-\rho^2}(X-\rho Y)^2 + Y^2 \end{aligned}$$

に注意しよう. Fubiniの定理から.

$$\begin{aligned} &\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\right)dy. \end{aligned}$$

が成立する.

$$z = X - \rho Y = \frac{x-\mu_1}{\sigma_1} - \rho Y$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2} z^2} \cdot e^{-\frac{Y^2}{2}} (\sigma_1\, dz)$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} dz$$

$$\zeta = \frac{z}{\sqrt{1-\rho^2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{e^{-\frac{Y^2}{2}}}{\sigma_2} \cdot \sqrt{2\pi} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{Y^2}{2}}$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}Y^2} dY = 1$$

(iii) $\iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, dx\, dy = ?$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx \right) dy$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x,y)\, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 + \sigma_1 z + \rho \sigma_1 \Upsilon) \cdot \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{1}{1-\rho^2} z^2}\, e^{-\frac{\Upsilon^2}{2}}\, \sigma_1\, dz$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} (\mu_1 + \rho\sigma_1\Upsilon) \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{\Upsilon^2}{2}} \times \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{z}{\sqrt{1-\rho^2}}\right)^2} dz.$$

$$+ \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_2} e^{-\frac{\Upsilon^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} z\, e^{-\frac{1}{2}\frac{z^2}{1-\rho^2}} dz}_{=0}$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\mu_1 + \rho\sigma_1\Upsilon) \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{\Upsilon^2}{2}} \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\zeta^2} d\zeta}_{=\sqrt{2\pi}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} e^{-\frac{\Upsilon^2}{2}} (\mu_1 + \rho\sigma_1\Upsilon)$$

$$\iint_{\mathbb{R}^2} xy \; f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_2 Y + \mu_2) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2} (\mu_1 + \rho \sigma_1 Y) e^{-\frac{Y^2}{2}} \, dy \qquad dy = \sigma_2 \, dY$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_2 Y + \mu_2)(\mu_1 + \rho\sigma_1 Y) e^{-\frac{Y^2}{2}} \, dY$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mu_1 \mu_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{Y^2}{2}} \, dY$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\mu_1 \sigma_2 + \mu_2 \rho \sigma_1) Y e^{-\frac{Y^2}{2}} \, dY$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho \sigma_1 \sigma_2 Y^2 e^{-\frac{Y^2}{2}} \, dY$$

$$= \mu_1 \mu_2 + \rho \sigma_1 \sigma_2$$

(iv) $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} y\, f(x,y)\, dx\, dy$.

$$\iint_{\mathbb{R}^2} y\, f(x,y)\, dx\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx \right) dy$$

$dy = \sigma_2\, d\gamma$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} y\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2}\, e^{-\frac{\gamma^2}{2}}\, dy.$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma_2 \gamma + \mu_2)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{\gamma^2}{2}}\, d\gamma$$

$$= \mu_2.$$

(v) $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,y)\, dx$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2}\, e^{-\frac{\gamma^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{1}{\sigma_2}\, e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}$$

この意味は?

重積分

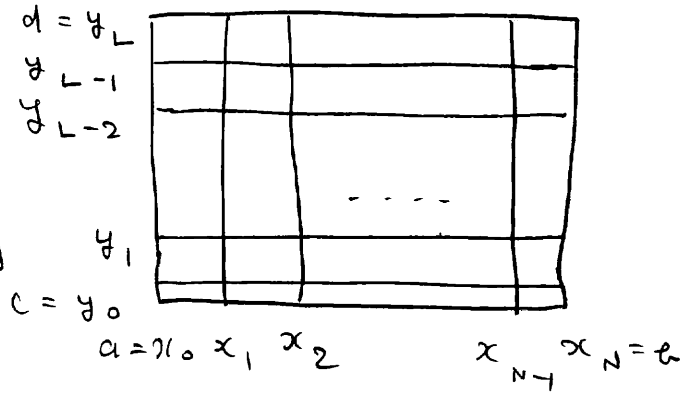
$$f : [a,b]\times[c,d] \longrightarrow \mathbb{R}$$

の $[a,b]\times[c,d]$ 上の重積分とは

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

とかいて、以下の極限である。右下図のように分割する。

$$(\xi_i, \eta_j) \in [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$$



を選び

$$\sum_{i,j} f(\xi_i, \eta_j)(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

$$\longrightarrow \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$$

$$(\Delta \to +0)$$

但し $\Delta = \max\left\{\max_i (x_i - x_{i-1}),\ \max_j (y_j - y_{j-1})\right\}$ を分割の細かさという。計算は次のFubiniの定理を用いる。

定理 ある条件の下で

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right) dy$$

$$= \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right) dx$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \lim_{R\to+\infty} \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$ を計算しよう.

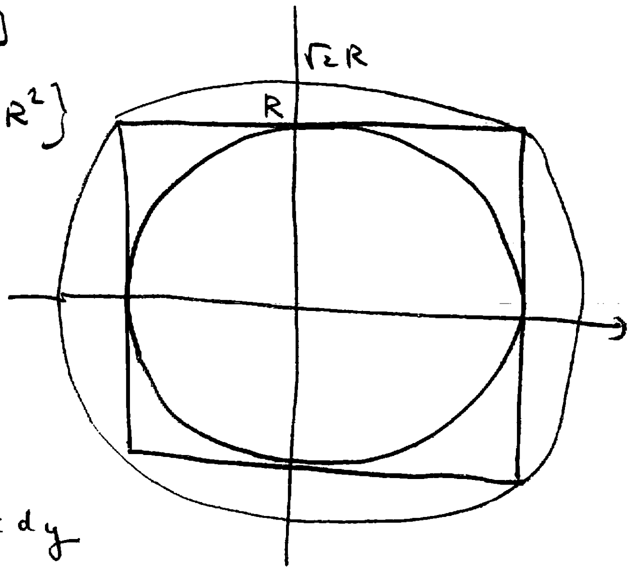
$$I_R = \int_{-R}^{R} e^{-x^2}\,dx$$

とおく。上の Fubini の定理を用いると

$$I_R^2 = \int_{[-R,R]\times[-R,R]} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

$$D_R = \{(x,y);\ x^2+y^2 \leq R^2\}$$

とする。



$$J_R = \int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

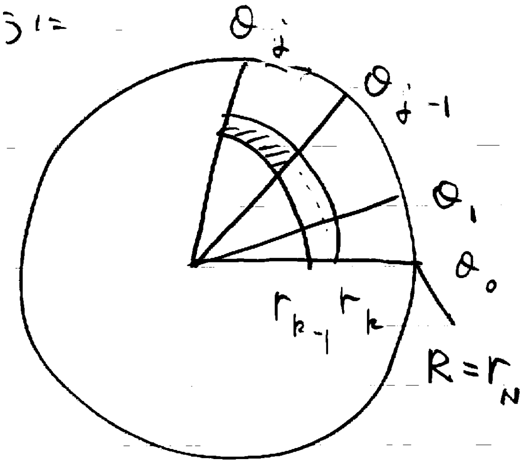
$$\overset{\text{定ぎ}}{=} \int_{[-R,R]\times[-R,R]} \chi_{D_R}\, e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

と定める。ここで

$$\chi_{D_R}(x,y) = \begin{cases} 1 & (x,y)\in D_R \\ 0 & (x,y)\notin D_R \end{cases}$$

$$\int_{D_R} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy$$

を別の形で計算しよう。右図のように D_R を分割する。



$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

と極座標で表すと

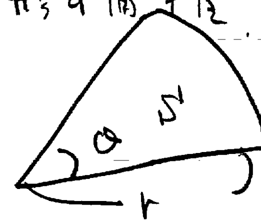
$$\left\{ (x,y);\ \begin{array}{l} r_{k-1} \le r \le r_k \\ \theta_{j-1} \le \theta \le \theta_j \end{array} \right\}$$

の面積は

$$\frac{1}{2}\left(r_k^2 - r_{k-1}^2\right)\left(\theta_j - \theta_{j-1}\right)$$

である。この分割でのRiemann和は

扇形の面積



$$S = \frac{1}{2}\theta r^2$$

$$\sum_{j,k} e^{-\left(\frac{r_k+r_{k-1}}{2}\right)^2} \frac{1}{2}\left(r_k^2 - r_{k-1}^2\right)\left(\theta_j - \theta_{j-1}\right)$$

$$= \sum_{j,k} e^{-\left(\frac{r_k+r_{k-1}}{2}\right)^2} \frac{1}{2}\left(r_k + r_{k-1}\right) \times \left(r_k - r_{k-1}\right)\left(\theta_j - \theta_{j-1}\right)$$

$$\longrightarrow \int_{[0,2\pi]\times[0,R]} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta$$

$$J_R = \int_{[0,2\pi]\times[0,R]} e^{-r^2}\, r\, dr\, d\theta = \int_0^R \left(\int_0^{2\pi} e^{-r^2} r\, d\theta \right) dr$$

$$= 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r\, dr = 2\pi \int_0^R \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right)'$$

$$= 2\pi \times \frac{1}{2} \left(1 - e^{-R^2} \right) = \pi \left(1 - e^{-R^2} \right)$$

である。ここで

$$\begin{array}{ccccc} J_R & \leq & I_R^2 & \leq & J_{\sqrt{2}R} \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ \pi & & & & \pi \end{array}$$

より $\quad I_R^2 \longrightarrow \pi$

を得るので $\quad \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$

が従う。